Ciencia e hipótesis

Por

Henri Poincaré

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE
Título original: *Science and Hypothesis*

Primera edición: The Walter Scott Publishing Company, 1905

ISO-8859-1

PREFACIO

Para el observador superficial, la verdad científica es inexpugnable, la lógica de la ciencia es infalible, y, si los hombres de ciencia a veces cometen errores, es porque no han comprendido las reglas del juego. Las verdades matemáticas se derivan de unas pocas proposiciones auto-evidentes, a partir de una cadena de razonamientos perfectos; y no están impuestas únicamente sobre nosotros, sino también sobre la naturaleza. El Creador está encadenado a ellas, por decirlo así, y Su elección está limitada a un número relativamente pequeño de soluciones. Unos pocos experimentos, por lo tanto, serán suficientes para que podamos determinar qué elección ha sido tomada por Él. A cada experimento, le siguen un número de consecuencias a partir de una serie de deducciones matemáticas y, de esta forma, cada una de ellas nos revelará un rincón del universo. Todo esto, para las mentes de la mayoría de las personas, y para los estudiantes adquiriendo sus primeras ideas de física, constituye el origen de la certeza científica. Esto es lo que ellos consideran como el papel que desempeñan el experimento y las matemáticas. Y también así fue entendido hace cien años por muchos hombres de ciencia que soñaron con construir el mundo con la ayuda de la cantidad más pequeña posible de material extraído de la experiencia.

Pero desde una reflexión más madura, se pudo ver la posición mantenida por la hipótesis; se reconoció que es tan necesaria al experimentador como al matemático. Y surgió la duda acerca de si todas estas construcciones están basadas sobre fundamentos sólidos. Se concluyó, pues, que un simple soplo las podría derrumbar. Esta actitud escéptica no escapa a la superficialidad. El dudar de todo o el creer todo son dos soluciones convenientes; ambas prescinden de la necesidad de reflexionar.

En lugar de una condena sumaria, debemos examinar, con extremo cuidado, el papel de la hipótesis; debemos entonces reconocer no solamente que es necesaria, sino que, en la mayoría de los casos, es legítima. También debemos tener en cuenta que hay varios tipos de hipótesis; que algunas son verificables, y que, una vez confirmadas por el experimento, se vuelven verdades de gran fertilidad; que otras pueden resultarnos útiles para arreglar nuestras ideas; y, finalmente, que otras son hipótesis sólo en apariencia, y reducidas a definiciones o a convenciones disfrazadas. Lo último debe cumplirse especialmente en las matemáticas y en las ciencias a las que se aplica. En realidad, las ciencias derivan su rigor de las hipótesis; tales convenciones son el resultado de la actividad irrestricta de la mente que, en este ámbito, no conoce obstáculo alguno. Y es que aquí la mente puede afirmar algo porque está establecido por sus propias leyes; pero debemos tener claro que, aún cuando estas leyes estén impuestas en *nuestra* ciencia - y que de otra forma no podría existir -, no están impuestas en la naturaleza. ¿Son entonces arbitrarias? No; porque si lo fueran, no serían fecundas. La experiencia nos deja nuestra libertad de elección, pero nos guía para discernir cuál es el camino más conveniente a seguir. Por lo tanto, nuestras leyes son como las de un monarca absoluto, que es sabio y consulta constantemente a su consejo de Estado. Algunas personas han sido perturbadas por esta característica de libre convención que puede ser reconocida en determinados principios fundamentales de las ciencias. Algunas no han puesto límite alguno a sus generalizaciones y, al mismo tiempo, han olvidado que existe una diferencia entre la libertad y lo puramente arbitrario. De manera que están obligados a adoptar una posición llamada *nominalismo*; se han preguntado si el *sabio* no es el engaño de sus propias definiciones, y si el mundo que piensa haber descubierto no es simplemente la creación de su propio capricho.[*] Bajo estas condiciones, la ciencia mantendría su certeza, pero no alcanzaría su objetivo y, por lo tanto, carecería de cualquier poder. Ahora bien, diariamente vemos lo que la ciencia hace por nosotros. Esto no podría ser, a menos que nos enseñara algo nuevo acerca de la realidad; el objetivo de la ciencia no son las cosas por sí mismas, como supone la simplicidad de los dogmáticos, sino las relaciones entre las cosas; fuera de esas relaciones no existe realidad conocible.

Tal es la conclusión a la que nos vemos llevados; pero para alcanzar tal conclusión, debemos pasar revista a la serie de las ciencias, desde la aritmética y la geometría, hasta la mecánica y la física experimental. ¿Cuál es la naturaleza del razonamiento matemático? ¿Es realmente deductivo, como comúnmente se supone? Un análisis cuidadoso nos demuestra que no es nada de este tipo, y que participa, en cierta medida, en la naturaleza del razonamiento inductivo, y por esa razón es fructífero. Pero, con todo eso, conserva su carácter de rigor absoluto, y esto es lo que primeramente debe ser mostrado.

Cuando sabemos más de este instrumento puesto en las manos del investigador por las matemáticas, debemos entonces analizar otra idea fundamental, a saber, la de la magnitud matemática. ¿La encontramos en la naturaleza, o la hemos introducido

[*] Cf. E. le Roy: “Science et Philosophie”, *Revue de Métaphysique et Morale*, 1901.

nosotros? Y si lo último es el caso, ¿no cometemos el riesgo de llegar a conclusiones del todo incorrectas? Si comparamos los datos en bruto de nuestros sentidos con la extremadamente compleja y sutil concepción que los matemáticos llaman magnitud, debemos reconocer una divergencia. El marco en el que deseamos que todo encaje es de nuestra propia construcción; pero no lo construimos al azar, sino que lo construimos, por decirlo de alguna manera, por medición; y es por eso por lo que podemos hacer que los hechos encajen en él sin alterar sus cualidades esenciales.

El espacio constituye otro marco que imponemos al mundo. ¿De dónde derivan los primeros principios geométricos? ¿Son impuestos en nosotros por la lógica? Lobachevski, al inventar las geometrías no euclidianas, ha demostrado que este no es el caso. ¿Está relevado el espacio a nosotros por nuestros sentidos? No; porque el espacio revelado a nosotros por nuestros sentidos es absolutamente diferente del espacio de la geometría. ¿Deriva la geometría de nuestra experiencia? Una discusión cuidadosa dará la respuesta: no. Podemos por tanto concluir que los principios de la geometría no son más que convenciones; pero estas convenciones no son arbitrarias, y, si son transportadas a otro mundo (que llamaré el mundo no euclidiano, y que trataré de describir), nos veremos obligados a adoptar más de ellas.

En la mecánica, nos vemos conducidos a conclusiones análogas, y veremos que los principios de esta ciencia, aunque basados de manera más directa en la experiencia, todavía comparten el carácter convencional de los postulados geométricos. Hasta ahora, triunfa el nominalismo; pero ahora llegamos a las ciencias físicas, propiamente dichas, y el escenario cambia. Nos encontramos con hipótesis de otro tipo, y comprendemos totalmente qué tan fructíferas son. Sin duda, en un principio, las teorías parecen poco sólidas, y la historia de la ciencia nos muestra qué tan efímeras pueden ser; pero no perecen por completo, y de cada una de ellas quedan algunos rastros. Son precisamente estos rastros los que debemos intentar descubrir, porque en ellos y únicamente en ellos se encuentra la verdadera realidad.

El método de las ciencias físicas está basado en la inducción, que nos lleva a esperar la recurrencia de un fenómeno cuando se repiten las circunstancias que lo hicieron surgir. Si todas las circunstancias pudiesen ser reproducidas simultáneamente, este principio podría ser aplicado sin titubeos; pero esto nunca sucede, y siempre faltarán algunas de las circunstancias. ¿Estamos completamente seguros de que no son importantes? ¡Evidentemente no! Puede ser probable, pero no puede ser rigurosamente certero. De ahí la importancia que desempeña en las ciencias físicas la ley de la probabilidad. El cálculo de probabilidades no es, por lo tanto, una simple recreación, o una guía para el jugador de bacará[†]; y debemos examinar a fondo los principios en los que se basa. En esta conexión, no tengo más que resultados muy incompletos para poner ante el lector, porque el vago instinto que nos permite determinar la probabilidad casi rehúye al análisis. Después de un estudio de las condiciones bajo las cuales se lleva a cabo el trabajo del físico, he pensado que lo mejor era mostrarlo en el trabajo mismo. Para este propósito, he tomado casos de la historia de la óptica y de la electricidad. Así, veremos cómo surgieron las ideas de Fresnel y Maxwell, y qué hipótesis inconscientes fueron hechas por Ampère y otros fundadores de la electro-dinámica.

[†] El bacará es un juego de cartas parecido al blackjack. Nota del Traductor.

PARTE 1

NÚMERO

Y

MAGNITUD

CAPÍTULO 1

SOBRE LA NATURALEZA DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

I

La posibilidad misma de la ciencia matemática parece una contradicción insoluble. Si esta ciencia es solamente deductiva en apariencia, ¿de dónde deriva ese perfecto rigor que no es desafiado por nadie? Si, por el contrario, todas las proposiciones que enuncia pueden ser derivadas en orden a partir de las reglas de la lógica formal, ¿cómo es que las matemáticas no se reducen a una gigante tautología? El silogismo no puede enseñarnos nada esencialmente nuevo, y si todo debe brotar del principio de identidad, entonces todo puede ser reducido a ese principio. ¿Debemos por tanto admitir que todos los enunciados de todos los teoremas que componen tantos volúmenes son solamente modos indirectos de decir que *A* es *A*?

Sin duda, podemos hacer referencia a los axiomas que son la fuente de todos estos razonamientos. Si se considera que no pueden ser reducidos al principio de contradicción, si nos negamos a ver en ellos algo más que hechos experimentales que no tienen parte, o tienen mucha, en la necesidad matemática, todavía nos queda un recurso: podemos clasificarlos entre las perspectivas sintéticas *a priori*. Pero esta no es solución alguna para la dificultad - es simplemente darle un nombre -; e incluso si la naturaleza de las perspectivas sintéticas no tuviese ya para nosotros ningún misterio, la contradicción no desaparecería; únicamente habría sido evitada. El razonamiento silogístico sigue siendo incapaz de añadir cualquier cosa a los datos con los que contamos; los datos son reducidos a axiomas, y es todo lo que encontraremos en las conclusiones.

Ningún teorema puede ser nuevo a menos que un nuevo axioma intervenga en su demostración; el razonamiento solamente puede proporcionarnos verdades inmediatamente evidentes tomadas de la intuición directa; únicamente sería un parásito intermediario. ¿No debemos entonces tener razón para preguntar si el aparato silogístico sirve sólo para disfrazar lo que hemos tomado?

La contradicción es aún más evidente si abrimos cualquier libro de matemáticas; en cada página, el autor anuncia su intención de generalizar algunas proposiciones ya conocidas. ¿Procede el método matemático de lo particular a lo general? Y, si esto es así, ¿cómo puede ser un método deductivo?

Finalmente, si la ciencia del número fuese simplemente analítica, o pudiese ser analíticamente derivada de unas pocas intuiciones sintéticas, entonces parecería que una mente lo suficientemente poderosa pudiera, con una sola mirada, percibir todas sus verdades; más aún, uno podría esperar que algún día se invente un lenguaje lo suficientemente simple para hacer que estas verdades sean evidentes a cualquier persona de inteligencia ordinaria.

Incluso si estas consecuencias son desafiadas, debe concederse que el razonamiento matemático tiene, por sí mismo, una especie de virtud creativa, y que, por tanto, debe ser distinguido del silogismo. Y esta diferencia debe ser profunda. No vamos, por ejemplo, a encontrar la llave para el misterio -en el uso frecuente de la regla- por el cual la misma operación uniforme, aplicada a dos números iguales, dará resultados idénticos. Todos estos modos de razonamiento, reducibles o no al silogismo propiamente dicho, conservan su carácter analítico e, *ipso facto*, pierden su poder.

II

El argumento es muy viejo. Veamos cómo Leibniz trató de demostrar que dos y dos son cuatro. Asumo que el número uno está definido, y que también lo está la operación $x+1$, es decir, la adición de la unidad a un número dado *x*. Estas definiciones, cualesquiera que ellas sean, no entran en el siguiente razonamiento. Después, defino los números 2, 3, 4 por las igualdades:

(1) $1+1=2$; (2) $2+1=3$; (3) $3+1=4$, y, de la misma forma, defino la operación $x+2$ por la relación (4) $x+2=(x+1)+1$.

Dado esto, tenemos que:

$$2+2=(2+1)+1 \quad \text{(def. 4)}$$
$$(2+1)+1=3+1 \quad \text{(def. 2)}$$
$$3+1=4 \quad \text{(def. 3)}$$
$$\text{por lo cual } 2+2=4 \quad \text{Q. E. D.}$$

No puede negarse que este razonamiento es puramente analítico. Pero si preguntamos a un matemático, responderá: “Esto no es una demostración propiamente dicha; es una verificación”. Nos hemos limitado a reunir una u otra de dos definiciones puramente convencionales, y hemos verificado su identidad; nada nuevo ha sido aprendido. La *verificación* difiere de la prueba precisamente porque es analítica, y porque no conduce a nada. Y no conduce a nada porque la conclusión no es nada más que las premisas traducidas a otro lenguaje. Una prueba real, por otra parte, es fructífera, porque la conclusión es, en cierto sentido, más general que las premisas. La igualdad 2+2= 4 puede ser verificada porque es particular. Cada enunciado individual en las matemáticas puede ser siempre verificado de la misma forma. Pero si las matemáticas pudiesen ser reducidas a una serie de tales verificaciones, no sería una ciencia. Un jugador de ajedrez, por ejemplo, no crea una ciencia cuando gana una pieza. No hay ninguna ciencia sino la ciencia de lo general. Puede incluso decirse que el propósito de las ciencias exactas es prescindir de estas verificaciones directas.

III

Veamos ahora al geómetra en su trabajo, y tratemos de sorprender algunos de sus métodos. La tarea no es nada fácil; no es suficiente con abrir un libro al azar y analizar cualquier prueba con la que nos encontremos. Antes que nada, la geometría debe ser excluida, o la cuestión se complicará por problemas difíciles relacionados con el papel que desempeñan los postulados, la naturaleza, y el origen de la idea del espacio. Por razones análogas, no podemos recurrir al cálculo infinitesimal. Debemos buscar al pensamiento matemático ahí donde se ha mantenido puro, a saber, en la aritmética. Pero todavía tenemos que escoger; en las partes elevadas de la teoría de números, las ideas matemáticas primitivas han sufrido una elaboración tan profunda, que se vuelve muy difícil analizarlas.

Es por tanto al comienzo de la aritmética en donde debemos esperar encontrar la explicación que buscamos; pero sucede que es precisamente en las pruebas de los teoremas más elementales en donde los autores de los tratados clásicos han mostrado la menor precisión y rigor. No debemos imputar a ellos esto como un crimen; simplemente han obedecido una necesidad. Los principiantes no están preparados para el verdadero rigor matemático; no ven en él nada más que sutilezas vacías y tediosas. Sería una pérdida de tiempo intentar hacerlos más exigentes; tienen que pasar rápidamente y sin parar por el camino pisado lentamente por los fundadores de la ciencia.

¿Por qué lleva tanto tiempo la preparación necesaria para habituarse a este rigor perfecto, que parecería debe estar impuesto en todas las mentes de manera natural? Este es un problema lógico y psicológico que valdría la pena estudiar. Pero nosotros no lo trataremos, ya que es ajeno a nuestro tema. En lo que quiero insistir es en que fallaremos en nuestro propósito, a menos que reconstruyamos las pruebas de los teoremas elementales, y les demos, no la tosca forma en la que son dejados para no fatigar al principiante, sino la forma que satisfaría al geómetra experto.

DEFINICIÓN DE LA ADICIÓN

Asumo que la operación $x+1$ ha sido definida; consiste en añadir el número 1 a un número dado *x*. Cualquier cosa que sea dicha sobre esta definición, no tiene cabida en el siguiente razonamiento.

Ahora tenemos que definir la operación $x+a$, que consiste en añadir el número *a* a cualquier número dado *x*. Supongamos que hemos definido la operación $x+(a-1)$; la operación $x+a$ será definida por la igualdad: (1) $x+a=[x+(a-1)]+1$. Sabremos qué es $x+a$ cuando sepamos qué es $x+(a-1)$, y, como he asumido que, para empezar, sabemos qué es $x+1$, podemos definir sucesivamente y “por recurrencia” las operaciones $x+2$, $x+3$, etc. Esta definición merece un momento de atención: es de una naturaleza particular lo que la distingue, incluso en esta etapa, de la definición puramente lógica; la igualdad (1), en realidad, contiene un número infinito de distintas definiciones, cada una teniendo sólo un significado cuando conocemos el significado de su predecesor.

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN

Asociativa. Yo digo que $a+(b+c)=(a+b)+c$; de hecho, el teorema es verdadero para $c=1$. Puede entonces ser escrito como $a+(b+1)=(a+b)+1$; que, teniendo en cuenta la diferencia de notación, no es nada más que la igualdad (1) por la cual acabo de definir la adición. Asumiendo que el teorema es verdadero para $c = \gamma$, digo que será cierto para $c = \gamma+1$. Sea $(a+b)+ \gamma = a+ (b+ \gamma)$, se sigue que $[(a+b)+ \gamma]+1 = [a+ (b+ \gamma)]+1$; o, por def. (1), $(a+b)+ (\gamma+1) = a+ (b+ \gamma+1) = a+ [b+ (\gamma+1)]$, que demuestra, por una serie de deducciones puramente analíticas, que el teorema es verdadero para $\gamma+1$. Siendo cierto para $c = 1$, vemos que es sucesivamente cierto para $c = 2$, $c = 3$, etc.

Conmutativa. (1) Yo digo que $a+1=1+a$. El teorema es evidentemente verdadero para $a=1$; podemos *verificar*, a partir de un razonamiento puramente analítico, que si es cierto para $a = \gamma$, será cierto para $a = \gamma+1$. Ahora, es verdadero para $a=1$, y, por lo tanto, es verdadero para $a=2$, $a=3$, etc. Esto es lo que se entiende al decir que la prueba se demuestra "por recurrencia".

(2) Digo que $a+b=b+a$. El teorema - como se acaba de demostrar - es válido para $b=1$, y puede ser verificado, analíticamente, que si es verdadero para b = β, será verdadero para $b = \beta+1$. De esta forma, se establece la proposición por recurrencia.

DEFINICIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN

Vamos a definir la multiplicación por las igualdades: (1) $a\times 1=a$. (2) $a\times b=[a\times(b-1)]+a$. Ambas incluyen un número infinito de definiciones; habiendo definido $a\times 1$, podemos definir sucesivamente $a\times 2$, $a\times 3$, etc.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

Distributiva. Yo digo que $(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$. Podemos verificar analíticamente que el teorema es cierto para $c=1$; entonces, si es cierto para $c=\gamma$, será verdadero para $c=\gamma+1$. Así, la proposición es probada por recurrencia.

Conmutativa. (1) Digo que $a\times 1=1\times a$. El teorema es obvio para $a=1$. Podemos verificar analíticamente que, si es verdadero para $a=a$, será verdadero para $a=a+1$.

(2) Yo digo que $a\times b=b\times a$. El teorema ya ha sido probado para $b=1$. Podemos verificar analíticamente que, si es cierto para $b=\beta$, será cierto para $b=\beta+1$.

IV

Esta monótona serie de razonamientos puede ahora ser dejada de lado; pero su misma monotonía trae vivacidad para iluminar el proceso, que es uniforme, y se cumple de nuevo en cada paso. El proceso es prueba por recurrencia. Primero demostramos que un teorema es verdadero para $n=1$; después demostramos que, si es verdad para $n-1$, es cierto para n, y concluimos que es cierto para todos los enteros. Hemos visto ahora cómo puede ser usado esto para la prueba de las reglas de la adición y la multiplicación, es decir, para las reglas del cálculo algebraico. Este cálculo es un instrumento de transformación que se presta a sí mismo a muchas más combinaciones diferentes que el simple silogismo; pero sigue siendo un instrumento puramente analítico, y es incapaz de enseñarnos nada nuevo. Si las matemáticas no tuvieran otro instrumento, inmediatamente estarían estancadas en su propio desarrollo, pero tienen de nuevo el recurso al mismo proceso, esto es, al razonamiento por recurrencia, y, de esta manera, pueden continuar con su marcha hacia adelante. Entonces, si observamos cuidadosamente, encontramos este modo de razonamiento en cada paso, ya sea bajo la simple forma que recién le hemos dado, o bajo otra forma más o menos modificada. Es, por consiguiente, el razonamiento matemático *par excellence*, y debemos examinarlo más de cerca.

V

La característica esencial del razonamiento por recurrencia es que contiene, de manera condensada - por decirlo de alguna manera - y en una única fórmula, un número infinito de silogismos. Veremos esto de manera más clara si enunciamos los silogismos uno después de otro. Se siguen uno de otro, si me permiten usar la expresión, como en una cascada. Los siguientes son los silogismos hipotéticos: El teorema es cierto del número 1. Ahora, si es cierto de 1, es cierto de 2; por lo tanto, es cierto de 2. Ahora, si es cierto de 2, es cierto de 3; por lo tanto, es cierto de 3, y así sucesivamente. Vemos que la conclusión de cada silogismo sirve como el menor de su sucesor. Además, los mayores de todos nuestros silogismos, pueden ser reducidos a una única forma. Si el teorema es verdadero de $n-1$, entonces es verdadero de n.

Vemos, por tanto, que en el razonamiento por recurrencia nos limitamos a la enunciación del menor del primer silogismo, y a la fórmula general que contiene, como casos particulares, a todos los mayores. Esta serie interminable de silogismos es, así, reducida a una frase de unas pocas líneas.

Ahora es fácil comprender - como ya he explicado arriba - por qué cada consecuencia particular de un teorema puede ser verificada por procesos puramente analíticos. Si, en lugar de probar que nuestro teorema es verdadero para todos los números, solamente deseáramos demostrar que es verdadero para el número 6, por ejemplo, sería suficiente con establecer los primeros cinco silogismos en nuestra cascada. Requeriríamos 9 si deseásemos probarlo para el número 10; para un número mayor requeriríamos todavía más; pero, sin importar qué tan grande sea el número, siempre podremos llegar a él, y la verificación analítica siempre será posible. Pero, no importa qué tan lejos hayamos llegado, nunca alcanzaremos el teorema general aplicable a todos los números y que, por sí mismo, constituye el objeto de la ciencia. Para alcanzarlo, necesitaríamos un número infinito de silogismos, y deberíamos cruzar un abismo que, debido a la paciencia del analista, restringido a los recursos de la lógica formal, nunca se podría cruzar.

Pregunté al principio por qué no podíamos concebir una mente lo suficientemente poderosa como para ver, de un vistazo, todo el cuerpo de la verdad matemática. Ahora la respuesta es fácil. Un jugador de ajedrez puede hacer combinaciones para cuatro o cinco movimientos futuros; pero, no obstante cuán extraordinario jugador sea, no puede prepararse para más de un número finito de movimientos. Si aplica sus facultades a la aritmética, no podría concebir sus verdades generales solamente a partir de la intuición directa; para probar incluso el teorema más pequeño, debe usar el razonamiento por recurrencia, porque ese es el único instrumento que nos permite pasar de lo finito a lo infinito. Este instrumento es siempre útil, porque nos permite saltarnos tantos pasos como queramos; nos libera de la necesidad de verificaciones largas, tediosas, y monótonas, y que rápidamente se vuelven impracticables. Después, cuando tenemos en nuestras manos al teorema general, se vuelve indispensable, porque de otra forma, siempre nos acercaríamos a la verificación analítica sin ni siquiera haberla alcanzado. En este campo de la aritmética, podemos pensarnos como muy lejanos del análisis infinitesimal, pero la idea del infinito matemático ya desempeña un papel preponderante, y, sin ella, no habría ciencia en absoluto, porque no habría nada general.

VI

Los puntos de vista sobre los cuales se basa el razonamiento por recurrencia pueden ser expuestos en otras formas. Podríamos decir, por ejemplo, que en cualquier colección finita de diferentes números enteros, siempre habrá uno que sea menor que cualquier otro. Podemos pasar fácilmente de una enunciación a otra, y así crear la ilusión de que es legítimo haber probado ese razonamiento por recurrencia. Pero siempre seremos conducidos a un punto: siempre llegaremos a un axioma indemostrable, que será en el fondo la proposición que teníamos que probar traducida en otro lenguaje. No podemos escapar, pues, a la conclusión de que la regla del razonamiento por recurrencia es irreducible al principio de contradicción. Ni puede esta regla provenir de la experiencia. El experimento puede mostrarnos que la regla es verdadera para los primeros diez o los primeros cien números, por ejemplo; no nos llevará a la serie indefinida de números, sino únicamente a una porción de la serie más o menos larga, pero siempre limitada.

Ahora bien, si esto fuese todo lo que está en cuestión, el principio de contradicción resultaría suficiente, es decir, siempre nos permitiría desarrollar tantos silogismos como quisiéramos. Es sólo cuando la cuestión se refiere a una única fórmula que abarque un número infinito de silogismos que este principio se rompe, y el experimento, tampoco aquí, tiene poder alguno. Esta regla, inaccesible a la prueba analítica y al experimento, representa el tipo exacto de una intuición sintética *a priori*. Por otra parte, no podemos ver en ella una convención, como sí podemos hacerlo en el caso de los postulados de la geometría.

Entonces, ¿por qué está impuesto en nosotros este punto de vista con tal peso irresistible de evidencia? Es porque es sólo la afirmación del poder de la mente, que sabe que es capaz de concebir la repetición indefinida del mismo acto, cuando el acto es posible una vez. La mente tiene una intuición directa de este poder, y el experimento sólo puede ser una oportunidad para usarlo, y, de este modo, de tener consciencia sobre él.

Pero se podrá decir, si la legitimidad del razonamiento por recurrencia no puede ser establecida únicamente a partir del experimento, ¿sucede lo mismo con el experimento ayudado por la inducción? Observamos de manera sucesiva que un teorema es verdadero del número 1, del número 2, del número 3, etc.; la ley es manifiesta, decimos, y es así sobre la misma base que cada ley física que es verdadera está basada en un muy largo pero limitado número de observaciones.

No puede escapar a nuestra atención que aquí hay una notable analogía con el proceso usual de inducción. Pero, no obstante, existe una diferencia esencial. La inducción aplicada a las ciencias físicas es siempre incierta, porque está basada en la creencia en un orden general del universo, un orden que es externo a nosotros. La inducción matemática - es decir, la prueba por recurrencia - está, por el contrario, necesariamente impuesta en nosotros, porque es sólo la afirmación de una propiedad de la mente por sí misma.

VII

Los matemáticos, como ya dije antes, siempre se esfuerzan por generalizar las proposiciones que han obtenido. Para no buscar ningún ejemplo más, hemos mostrado la igualdad $a+1=1+a$, y después la utilizamos para establecer la igualdad $a+b=b+a$, que, obviamente, es más general. Por tanto, las matemáticas pueden, como el resto de las ciencias, proceder de lo particular a lo general. Este es un hecho que, por lo demás, nos pudo haber parecido incomprensible al principio de este estudio, pero que ya carece de todo misterio, debido a que hemos comprobado las analogías entre la prueba por recurrencia y la inducción ordinaria.

No hay duda que el razonamiento recurrente matemático y el razonamiento inductivo físico están basados en distintos fundamentos, pero también es cierto que se mueven en líneas paralelas y en la misma dirección, a saber, de lo particular a lo general.

Examinemos el caso un poco más de cerca. Para probar la igualdad $a+2=2+a \ldots$ (1), solamente tenemos que aplicar dos veces la regla $a+1=1+a$, y escribir $a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a \ldots$ (2).

La igualdad así deducida - por puros medios analíticos - no constituye, sin embargo, un simple caso particular. Es algo sumamente diferente. No podemos incluso decir, por tanto (en la parte realmente analítica y deductiva del razonamiento matemático), que procedemos de lo general a lo particular en el sentido ordinario de las palabras. Los dos lados de la igualdad (2) son simplemente combinaciones más complicadas que los dos lados de la igualdad (1), y el análisis sólo sirve para separar los elementos que entran en estas combinaciones y para estudiar sus relaciones.

Los matemáticos, por consiguiente, proceden “por construcción”, esto es, “construyen” combinaciones más complicadas. Cuando analizan estas combinaciones, estos agregados - por decirlo de alguna manera -, en sus elementos primitivos, observan las relaciones de los elementos y deducen las relaciones de los agregados por sí mismos. El proceso es puramente analítico, pero no constituye un paso de lo general a lo particular, porque obviamente los agregados no pueden ser considerados como más particulares que sus elementos.

Una gran importancia ha sido correctamente dada a este proceso de “construcción”, y algunos claman ver en él la condición necesaria y suficiente para el progreso de las ciencias exactas. Necesaria, sin duda, pero no suficiente. Para que una construcción sea útil y no simplemente un desperdicio de esfuerzo mental, para que sirva como escalón para cosas más altas, debe poseer, antes que nada, una especie de unidad que nos permita ver algo más que la yuxtaposición de sus elementos. O, mejor dicho, debe haber alguna ventaja en considerar la construcción más bien que los elementos por sí mismos. ¿Cuál puede ser esta ventaja? ¿Por qué razonar sobre un polígono, por ejemplo, que es siempre descomponible en triángulos, y no sobre triángulos elementales? Es porque existen propiedades de polígonos de cualquier número de lados, y pueden ser inmediatamente aplicados a cualquier caso particular de polígono. En la mayoría de los casos, esas propiedades son descubiertas únicamente después de grandes esfuerzos, a partir de estudiar directamente las relaciones de los triángulos elementales. Si el cuadrilátero no es nada más que la yuxtaposición de dos triángulos, es porque es del tipo polígono.

Una construcción sólo se vuelve interesante cuando puede ser puesta junto con otras construcciones análogas para formar especies del mismo género. Para hacer esto, necesariamente tenemos que volver de lo particular a lo general, ascendiendo uno o dos pasos. El proceso analítico “por construcción” no nos obliga a descender, pero nos deja en el mismo nivel. Únicamente podemos ascender a partir de la inducción matemática, porque sólo a partir de ella podemos aprender algo nuevo. Sin la ayuda de esta inducción, que en ciertos aspectos difiere de la inducción física (aunque sea igual de fructífera), la construcción carecería de poder alguno para crear ciencia.

Permítanme observar, como conclusión, que esta inducción es únicamente posible si la misma operación puede ser repetida indefinidamente. Es por esto que la teoría del ajedrez nunca podrá ser una ciencia, porque los diferentes movimientos de la misma pieza son limitados, y porque no se parecen unos con otros.

CAPÍTULO II

MAGNITUD MATEMÁTICA Y EXPERIMENTO

Si queremos saber qué es lo que quieren decir los matemáticos por un continuo, es inútil apelar a la geometría. El geómetra siempre está buscando, más o menos, representarse las figuras que está estudiando, pero sus representaciones son sólo instrumentos para él; el usa el espacio en su geometría del mismo modo que usa la tiza; y además, no debe concederse mucha importancia a los accidentes que a menudo no son más que la blancura de la tiza.

El analista puro no tiene que temer a esta trampa. Él ha conseguido desenganchar a las matemáticas de todos los elementos extraños, y está en posición para responder nuestra cuestión: "Dime exactamente qué es este continuo, sobre el cual razonan los matemáticos". Muchos analistas que reflexionan sobre su arte ya han respondido. El Sr. Tannery, por ejemplo, en su *Introduction à la théorie des functions d'une variable*.

Comencemos con los números enteros. Entre cualesquiera dos conjuntos consecutivos, se intercalan uno o más conjuntos intermediarios, y después, entre éstos, se intercalan otros de nuevo, y así indefinidamente. De esta forma tenemos un número ilimitado de términos, y éstos serán los números que llamaremos fraccionales, racionales, conmensurables. Pero esto no es todo; entre estos términos, que, dicho sea de paso, son ya infinitos en número, están intercalados otros términos, y éstos son llamados irracionales o inconmensurables.

Antes de ir más lejos, permítanme hacer una observación preliminar. El continuo así concebido ya no es más una colección de individuos acomodados en un cierto orden, infinito en número, es cierto, pero externo el uno con el otro. Esta no es la concepción ordinaria, en donde se supone que entre los elementos del continuo existe una íntima conexión, haciendo de éste un todo, y en donde el punto no tiene existencia previa a la línea, pero la línea si existe previamente al punto. La multiplicidad subsiste por sí misma, y la unidad ha desaparecido - "el continuo es unidad en multiplicidad" -, de acuerdo con la célebre fórmula. Los analistas tienen menos razones aún para definir su continuo como lo hacen, debido a que es siempre sobre esto que razonan cuando están particularmente orgullosos de su rigor. Es suficiente con advertir al lector que el continuo matemático real es muy distinto del de los físicos y del de los metafísicos.

Debe también decirse, quizá, que los matemáticos que están contentos con esta definición son los incautos de las palabras, que la naturaleza de cada uno de estos conjuntos debe ser indicada de manera precisa, que debe ser explicado cómo es que están intercalados, y que debe mostrarse cómo es posible hacerlo. Esto, sin embargo, sería erróneo; la única propiedad de los conjuntos que viene al razonamiento es aquella de estos o aquellos otros conjuntos que se preceden o suceden unos a otros; esto, por sí mismo, debe por tanto intervenir en la definición. De manera que no es necesario preocuparnos con la forma en la que los conjuntos están intercalados, y nadie dudaría de la posibilidad de la operación si únicamente recuerda que lo "posible", en el lenguaje de los geómetras, significa simplemente lo exento de contradicción. Pero nuestra definición aún no está completa, y volvemos a ella después de esta digresión bastante larga.

Definición de inconmensurables. Los matemáticos de la Escuela de Berlín, y Kronecker en particular, se han dedicado a construir esta escala continua de números irracionales y fraccionales sin recurrir a otros materiales que no sean el número entero. El continuo matemático, desde este punto de vista, sería una pura creación de la mente, en donde el experimento no tendría ninguna parte.

Al no parecer presentar ninguna dificultad para ellos la idea de número racional, han dirigido su atención principalmente a definir los números inconmensurables. Pero antes de reproducir su definición aquí, debo hacer una observación que aliviará el estupor que esto provocará en los lectores que no están muy familiarizados con los hábitos de los geómetras.

Los matemáticos no estudian objetos, sino las relaciones entre los objetos; para ellos, es indiferente si estos objetos son remplazados por otros, siempre y cuando las relaciones no cambien. La materia no atrae su atención, únicamente están interesados en la forma.

Si no recordamos esto, difícilmente podríamos comprender que Kronecker da el nombre de número inconmensurable a un simple símbolo, esto es, algo muy diferente de la idea que pensamos debemos tener de una cantidad, que debe ser mensurable y casi tangible.

Veamos ahora cuál es la definición de Kronecker. Los números conmensurables pueden ser divididos en clases en un número infinito de formas, sujeto a la condición de que cualquier número de la primera clase es mayor que cualquier número de la segunda. Puede suceder que, entre los números de la primera clase, haya uno que sea menor que todo el resto; si, por ejemplo, acomodamos en la primera clase a todos los números mayores que 2, y al mismo 2, y en la segunda clase a todos los números menores que 2, es claro que 2 será el menor de todos los números de la primera clase. El número 2 puede, por tanto, ser escogido como el símbolo de esta división.

Puede suceder, por el contrario, que en la segunda clase haya uno que sea mayor que todo el resto. Esto es lo que sucede, por ejemplo, si la primera clase comprende todos los números mayores que 2, y si, en la segunda, están todos los números menores que 2, y el mismo 2. De nuevo aquí, 2 podría ser escogido como el símbolo de esta división.

Pero igual podría suceder que no podamos encontrar - en la primera clase - un número menor que todo el resto, ni en la segunda clase un número mayor que todo el resto. Supongamos, por ejemplo, que ponemos en la primera clase todos los números cuyos cuadrados son mayores que 2, y en la segunda, todos los números cuyos cuadrados son menores que 2. Sabemos que en ninguno de ellos hay un número cuyo cuadrado sea igual a 2. Evidentemente, en la primera clase no habrá un número que sea menor que todo el resto, porque, no importa cuán cercano a 2 sea el cuadrado de un número, siempre podemos encontrar un conmensurable cuyo cuadrado sea todavía más cercano a 2. Desde el punto de vista de Kronecker, el número inconmensurable $\sqrt{2}$ no es nada más que el símbolo de este método particular de división de números conmensurables; y a cada modo de repartición corresponde, de esta forma, un número, conmensurable o no, que sirve como un símbolo. Pero estar satisfechos con esto equivaldría a olvidar el origen de estos símbolos; falta explicar cómo hemos llegado a atribuir a ellos una especie de existencia concreta, y, por otra parte, ¿no empieza la dificultad con las fracciones? ¿Tendríamos la noción de estos números si previamente no hubiésemos conocido una materia que concebimos como infinitamente divisible, esto es, como un continuo?

El continuo físico. Esto nos conduce a preguntar si la idea del continuo matemático no es simplemente extraída de la experiencia. Si es así, los toscos datos del experimento, que son nuestras sensaciones, podrían ser medidos. En realidad, podemos estar tentados a creer que esto es así, porque en los últimos tiempos, ha habido un intento de medirlos, e incluso ha sido formulada una ley, conocida como la ley de Fechner, de acuerdo con la cual la sensación es proporcional al logaritmo del estímulo. Pero si examinamos los experimentos a partir de los cuales se ha establecido esta ley, llegaremos a una conclusión diametralmente opuesta. Se ha observado, por ejemplo, que un peso *A* de 10 gramos y un peso *B* de once gramos producen sensaciones idénticas, que el peso *B* ya no podía ser distinguido de un peso *C* de 12 gramos, pero que el peso *A* era fácilmente distinguido del peso *C*. Así, los toscos resultados de los experimentos pueden ser expresados por las siguientes relaciones: $A = B$, $B = C$, $A < C$, lo que puede ser considerado como la fórmula del continuo físico. Pero aquí hay un intolerable desacuerdo con la ley de contradicción, y la necesidad de desterrar este desacuerdo nos ha obligado a inventar el continuo matemático. Estamos, por tanto, forzados a concluir que esta noción ha sido creada totalmente por la mente, pero ha sido el experimento el que ha proporcionado la oportunidad. No podemos creer que dos cantidades, que son iguales a una tercera, no sean iguales entre sí, y nos vemos de esta forma conducidos a suponer que *A* es diferente de *B*, y *B* de *C*, y que si no hemos estado conscientes de esto, es porque nuestros sentidos son imperfectos.

La creación del continuo matemático. Primera etapa. Hasta ahora bastaría, para dar cuenta de los hechos, con intercalar, entre *A* y *B*, un pequeño número de términos que seguirían siendo discretos. ¿Qué sucede entonces si tenemos algún instrumento que compense la debilidad de nuestros sentidos? ¿Si, por ejemplo, usamos un microscopio? Tales términos como *A* y *B*, que antes eran indistinguibles uno de otro, parecen ahora ser distintos: pero entre *A* y *B*, que son distintos, se intercala otro nuevo término *D*, que no podemos distinguir ni de *A*, ni de *B*. Aunque pudiésemos utilizar los métodos más delicados, los toscos resultados de nuestros experimentos siempre presentarán el carácter del continuo físico con la contradicción inherente a él. Únicamente escapamos de esto al intercalar incesantemente nuevos términos entre los términos ya distinguidos, y esta operación debe ser perseguida indefinidamente. Podemos concebir que sería posible detenernos si pudiéramos imaginar un instrumento lo suficientemente poderoso para descomponer el continuo físico en elementos discretos, así como el telescopio resuelve la Vía Láctea en estrellas. Pero esto no lo podemos imaginar; siempre es con nuestros sentidos con lo que usamos los instrumentos; es con el ojo con lo que observamos la imagen magnificada por el microscopio, y esta imagen debe, por tanto, conservar siempre los caracteres de sensación visual, y, por consiguiente, aquellos del continuo físico.

Nada distingue una longitud observada directamente de la mitad de esa longitud duplicada por el microscopio. El todo es homogéneo a la parte; y ahí existe una nueva contradicción, o bien habría una si el número de los términos fuera supuesto a ser finito. Es claro que la parte conteniendo menos términos que el todo no puede ser similar al todo. La contradicción se desvanece en el momento en que el número de términos es considerado como infinito. No hay nada, por ejemplo, que nos impida considerar al agregado de enteros como similar al agregado de números pares, que es, sin embargo, sólo una parte de aquel; en realidad, a cada entero le corresponde otro número par que es su doble. Pero no es únicamente para escapar de esta contradicción - contenida en los datos empíricos - que la mente es llevada a crear el concepto de un continuo formado de un número indefinido de términos.

Aquí todo tiene lugar tal como en la serie de los enteros. Tenemos la facultad de concebir que una unidad puede ser añadida a una colección de unidades. Gracias al experimento, hemos tenido la oportunidad de ejercitar esta facultad y somos conscientes de ella; pero desde este hecho, sentimos que nuestro poder es ilimitado, y que podemos contar indefinidamente, aunque nunca tengamos que contar más que un número finito de objetos. De la misma manera, tan pronto como hemos intercalado términos entre dos términos consecutivos de una serie, sentimos que esta operación puede ser continuada de manera ilimitada y que, por decirlo de alguna forma, no existe una razón intrínseca para detenernos. Como una abreviación, puedo nombrar un continuo matemático de primer orden a cada agregado de términos formados después de la misma ley que la escala de números conmensurables. Si, después, intercalamos nuevos conjuntos de acuerdo con las leyes de los números inconmensurables, obtenemos lo que podría llamarse un continuo de segundo orden.

Segunda etapa. Solamente hemos dado el primer paso. Hemos explicado el origen de los continuos de primer orden; ahora debemos ver por qué esto no resulta suficiente, y por qué los números inconmensurables tuvieron que ser inventados.

Si tratamos de imaginar una línea, debe tener los caracteres del continuo físico, es decir, nuestra representación debe tener una cierta amplitud. Dos líneas, por tanto, nos aparecerán bajo la forma de dos bandas estrechas, y si estamos contentos con esta tosca imagen, es claro que cuando dos líneas se cruzan, deben tener una parte común.

Pero el geómetra puro realiza un esfuerzo más; sin renunciar por completo a la ayuda de sus sentidos, trata de imaginarse una línea sin amplitud, y un punto sin tamaño. Esto lo puede conseguir únicamente al imaginarse una línea como el límite hacia el cual tiende una banda que es cada vez más delgada, y al punto como el límite hacia el cual tiende un área cada vez más pequeña. Nuestras dos bandas, no importa qué tan estrechas puedan ser, tendrán siempre un área común; cuanto más pequeñas sean aquellas, más pequeña será ésta, y su límite es lo que el geómetra llama un punto. Es por esto que se dice que las dos líneas que se cruzan deben tener un punto común, y esta verdad parece ser intuitiva.

Pero estaría implicada una contradicción si concibiéramos líneas como continuos de primer orden, es decir, las líneas trazadas por el geómetra sólo deben darnos puntos, cuyas coordenadas son números racionales. La contradicción sería manifiesta si, por ejemplo, afirmáramos la existencia de líneas y círculos. En realidad, es evidente que si los puntos cuyas coordenadas son conmensurables fuesen considerados sólo como reales, la circunferencia inscrita de un cuadrado y la diagonal del mismo no tendrían intersección alguna, debido a que las coordenadas del punto de la intersección son inconmensurables.

Incluso entonces, debemos tener sólo ciertos números inconmensurables, y no todos estos números.

Pero imaginemos una línea dividida en dos medias rayas. Cada una de estas medias rayas aparecerá en nuestras mentes como una banda de una cierta amplitud; estas bandas encajarán juntas, porque no debe haber intervalo alguno entre ellas. La parte común nos parecerá ser un punto que seguirá siendo tal mientras imaginamos a las bandas adelgazar cada vez más, de manera que admitimos, como una verdad intuitiva, que si una línea es dividida en dos medias rayas, la frontera común de éstas será un punto. Aquí reconocemos la concepción de Kronecker, en donde un número inconmensurable era considerado como la frontera común de dos clases de números racionales. Tal es el origen del continuo de segundo orden, y que es el continuo matemático propiamente dicho.

Resumen. La mente tiene la facultad de crear símbolos, y es así como ha construido el continuo matemático, que es solamente un sistema particular de símbolos. El único límite a su poder es la necesidad de evitar toda contradicción; pero la mente sólo hace uso de ella cuando el experimento da una razón para eso.

En el caso que nos ocupa, la razón es dada por la idea del continuo físico, derivado de los toscos datos de los sentidos. Pero esta idea conduce a una serie de contradicciones de cada una de las cuales, a su vez, nos debemos librar. De esta forma, nos vemos forzados a imaginar un sistema cada vez más complicado de símbolos. Aquel en el que insistimos no está exento de contradicción interna - ya era así en todos los pasos que hemos seguido - pero no está más en contradicción con las distintas proposiciones llamadas intuitivas, y que derivan, más o menos, de nociones empíricas elaboradas.

Magnitud mensurable. Hasta ahora no hemos hablado de la *medida* de las magnitudes; podemos decir si cualquiera de ellas es mayor a cualquier otra, pero no podemos decir si es dos o tres veces más grande.

Hasta aquí, únicamente he considerado el orden en el que están acomodados los términos; pero esto no resulta suficiente para la mayoría de las aplicaciones. Debemos aprender cómo comparar el intervalo que separa cualesquiera dos términos. Bajo esta condición por sí sola, el continuo será medible, y las operaciones de la aritmética serán aplicables. Esto puede hacerse sólo con la ayuda de una convención nueva y especial; y esta convención es que, en tal caso, el intervalo entre los términos *A* y *B* es igual al intervalo que separa *C* y *D*. Por ejemplo, comenzamos con los enteros, y entre dos conjuntos consecutivos, intercalamos *n* conjuntos intermediarios; por convención, ahora asumimos estos nuevos conjuntos como equidistantes. Esta es una de las formas de definir la adición de dos magnitudes; porque si el intervalo *AB* es por definición igual al intervalo *CD*, el intervalo *AD* será por definición la suma de los intervalos *AB* y *AC*. Esta definición es en gran parte, pero no del todo, arbitraria. Debe satisfacer ciertas condiciones - las leyes conmutativas y asociativas de adición, por ejemplo -; pero, con tal que la definición que escojamos satisfaga estas leyes, la elección es indiferente, y no necesitamos afirmarla de manera precisa.

Observaciones. Ahora estamos en posición de discutir varias cuestiones importantes.

(1) ¿Está exhausto el poder creativo de la mente por la creación del continuo matemático? La respuesta es negativa, y esto se muestra de una manera sorprendente a partir del trabajo de Emil du Bois-Reymond.

Sabemos que los matemáticos distinguen entre infinitesimales de distintos órdenes, y que los infinitesimales del segundo orden son infinitamente pequeños, no solamente de manera absoluta, sino también en relación con aquellos del primer orden. No es difícil imaginar infinitesimales de orden fraccional, o incluso irracional, y aquí encontramos una vez más el continuo matemático con el que hemos tratado en páginas previas. Además, existen infinitesimales que son infinitamente pequeños con referencia a aquellos del primer orden, e infinitamente grandes con respecto al orden $1+\epsilon$, sin importar qué tan pequeño sea ϵ. Aquí, entonces, están intercalados nuevos términos en nuestra serie; y si me permiten volver a la terminología usada en las páginas anteriores, una terminología, por cierto, muy conveniente, aunque todavía no haya sido consagrada por el uso, debo decir que hemos creado una especie de continuo de tercer orden.

Es fácil seguir adelante ahora, pero sería ocioso hacerlo, porque únicamente estaríamos imaginando símbolos sin posible aplicación alguna, y nadie sueña con hacer eso. Este continuo de tercer orden, al que llegamos por la consideración de los distintos órdenes de infinitesimales, es, por sí mismo, de poco uso y difícilmente valga la pena incluso citarlo. Los geómetras lo miran como una simple curiosidad. La mente sólo usa su facultad creativa cuando el experimento lo requiere.

(2) Una vez que estamos en posesión de la concepción del continuo matemático, ¿estamos protegidos de contradicciones análogas a aquellas que hicieron posible este continuo? No, y lo siguiente es un ejemplo:

En realidad es un *sabio* aquel que no asume como evidente que cada curva tiene una tangente; y, de hecho, si pensamos en una curva y en una línea recta como dos bandas estrechas, siempre podemos acomodarlas de tal manera que tengan una parte común sin intersectarse. Supongamos ahora que la amplitud de las bandas disminuye indefinidamente; la parte común seguiría existiendo, y en el límite, por decirlo de alguna manera, las dos líneas tendrían una parte común, aunque no hubiera intersección, es decir, se tocarían. El geómetra que razona de esta forma solamente está haciendo lo que hicimos nosotros cuando probamos que dos líneas que se intersectan tienen un punto común, y esta intuición parece ser también legítima. Pero este no es el caso. Podemos demostrar que existen curvas que no tienen tangente, si definimos tal curva como un continuo analítico de segundo orden. Sin duda, algún artificio análogo a aquellos que hemos discutido arriba nos permitiría deshacernos de esta contradicción, pero como esto último sólo se cumple en casos muy excepcionales, no tenemos que molestarnos en hacerlo. En lugar de empeñarnos en reconciliar intuición y análisis, estamos satisfechos con sacrificar a uno de ellos, y como el análisis debe ser perfecto, la intuición debe ir a la pared.

El continuo físico de varias dimensiones. Hemos discutido arriba el continuo físico como derivado de la evidencia inmediata de nuestros sentidos - o, si el lector lo prefiere, de los toscos resultados de los experimentos de Fechner -; he demostrado que estos resultados están resumidos en las contradictorias fórmulas: $A = B$, $B = C$, $A < C$.

Veamos ahora cómo es generalizada esta noción, y cómo se deriva de ella el concepto de continuos de varias dimensiones. Consideremos cualesquiera dos agregados de sensaciones. Podemos, o bien distinguir entre ellas, o no; así como en los experimentos de Fechner, el peso de 10 gramos puede ser distinguido del peso de 12 gramos, pero no del peso de 11 gramos. Esto es todo lo que se requiere para construir el continuo de varias dimensiones.

Llamemos a uno de estos agregados de sensaciones un *elemento*. Será en una medida análogo al *punto* de los matemáticos, pero no será, sin embargo, la misma cosa. No podemos decir que nuestro elemento no tiene tamaño, porque no lo podemos distinguir de sus vecinos inmediatos, y es así como está rodeado de una especie de niebla. Si es posible hacer una analogía astronómica, nuestros “elementos” serían como las nebulosas, mientras que los puntos matemáticos serían como las estrellas.

Si esto se concede, un sistema de elementos formará un continuo si podemos pasar de cualquiera de ellos a cualquier otro por una serie de elementos consecutivos de tal forma que cada uno no pueda ser distinguido de su predecesor. Esta serie *lineal* es a la *línea* del matemático lo que el elemento *aislado* era al punto.

Antes de seguir, debo explicar qué es lo que se quiere decir por *corte*. Consideremos un continuo *C*, y removamos de él ciertos de sus elementos, que, por un momento, no consideraremos más como pertenecientes al continuo. Podemos llamar un *corte* al agregado de elementos así removidos. Por medio de este corte, el continuo *C* estará *subdividido* en varios continuos distintos; el agregado de elementos que permanecen cesará de formar un único continuo. Entonces habrá en *C* dos elementos, *A* y *B*, que debemos ver como pertenecientes a dos continuos distintos; y vemos que esto debe ser así, porque es imposible encontrar una serie lineal de elementos consecutivos de *C* (cada uno de los elementos indistinguible del precedente, el primero siendo *A*, y el último *B*), *a menos que uno de los elementos de esta serie sea indistinguible de uno de los elementos del corte*.

Puede suceder, por el contrario, que el corte no resulte suficiente para subdividir el continuo *C*. Para clasificar a los continuos físicos, primero debemos comprobar la naturaleza de los cortes que deben ser hechos para subdividirlos. Si un continuo físico

C, puede ser subdividido por un corte reduciendo a un número finito de elementos, todos distinguibles uno del otro (y, por lo tanto, no pudiendo formar ni un continuo ni varios continuos), debemos llamar a *C* un continuo de *una dimensión*. Si, por el contrario, *C* solamente puede ser subdividido por cortes que son por sí mismos continuos, debemos decir que *C* es de varias dimensiones; si los cortes son continuos de una dimensión, entonces debemos decir que *C* tiene dos dimensiones; si los cortes de dos dimensiones resultan suficientes, debemos decir que *C* es de tres dimensiones, y así sucesivamente. Así, está definida la noción del continuo físico de varias dimensiones, gracias al hecho muy simple de que dos agregados de sensaciones pueden ser distinguibles o indistinguibles.

El continuo matemático de varias dimensiones. La concepción del continuo matemático de *n* dimensiones, puede ser alcanzada de manera muy natural por un proceso similar al que discutimos al principio de este capítulo. Un punto de tal continuo está definido por un sistema de *n* magnitudes distintas que llamamos sus coordenadas.

Las magnitudes no necesitan ser mensurables siempre; existe, por ejemplo, una rama de la geometría independiente de la medida de magnitudes, en donde solamente nos ocupa saber, por ejemplo, si, en una curva *ABC*, el punto *B* está entre los puntos *A* y *C*, y en donde resulta indiferente si el arco *AB* es igual o el doble que el arco *BC*. Esta rama es llamada *Analysis Situs*. Contiene un gran cuerpo de doctrina que ha atraído la atención de los más grandes geómetras, y de donde derivan, uno de otro, toda una serie de teoremas notables. Lo que distingue estos teoremas de aquellos de la geometría ordinaria es que son puramente cualitativos. Siguen siendo verdaderos si son copiados por un dibujante inexperto, con el resultado de que las proporciones están distorsionadas y las líneas rectas remplazadas por líneas más o menos curvas.

Tan pronto como es introducida la medición en el continuo que hemos definido, el continuo se convierte en espacio, y nace, pues, la geometría. Pero la discusión de esto está reservada para la Parte II.

PARTE II

ESPACIO

CAPÍTULO III

GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Cada conclusión supone premisas. Estas premisas son, o bien evidentes por sí mismas y no necesitan demostración alguna, o pueden ser establecidas solamente si están basadas en otras proposiciones; y, como no podemos volver de esta manera hasta el infinito, cada ciencia deductiva, y la geometría en particular, debe descansar sobre un cierto número de axiomas indemostrables. Todos los tratados de geometría comienzan, por tanto, con la enunciación de estos axiomas. Pero debe hacerse una distinción entre ellos. Algunos como, por ejemplo, "Las cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre ellas", no son proposiciones de la geometría, sino más bien del análisis. Las veo como intuiciones analíticas *a priori*, y no me interesan más. Pero debo insistir en otros axiomas que resultan especiales a la geometría. Sobre éstos, la mayoría de los tratados enuncian tres: (1) Solamente una línea puede pasar a través de dos puntos; (2) una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos; (3) a través de un punto, solamente puede ser trazada una paralela a una línea recta dada. Aunque generalmente prescindimos de probar el segundo de estos axiomas, sería posible deducirlo de los otros dos, y de aquellos, axiomas mucho más numerosos que son implícitamente admitidos sin enunciación, como explicaré más adelante. Por mucho tiempo, se buscó en vano una prueba del tercer axioma, conocido como el postulado de Euclides. Es imposible imaginar los esfuerzos que han sido gastados en la persecución de esta quimera. Finalmente, a comienzos del siglo diecinueve, y casi de manera simultánea, dos científicos, uno ruso y uno búlgaro, Lobachevski y Bolyai, demostraron irrefutablemente que esta prueba es imposible. Prácticamente nos han librado de inventores de geometrías sin postulado alguno, y desde entonces, la Académie des Sciences recibe solamente alrededor de una o dos demostraciones por año. Pero la cuestión no estaba exhausta, y no pasó mucho tiempo antes de que fuese dado un importante paso a partir de la célebre memoria de Riemann, titulada: *Über die Hypothesen welche der Geometrie zum Grunde liegen*.[‡] Este pequeño trabajo ha inspirado a la mayoría de los tratados recientes a los que me referiré más tarde, y entre los cuales mencionaré los de Beltrami y Helmholtz.

La geometría de Lobachevski. Si fuese posible deducir el postulado de Euclides de los varios axiomas, es evidente que, al rechazar el postulado y conservar los otros axiomas, llegaríamos a consecuencias contradictorias. Sería imposible, por tanto, encontrar en aquellas premisas una geometría coherente. Ahora bien, esto es precisamente lo que ha hecho Lobachevski. Asume, al principio, que varias paralelas pueden ser trazadas a través de un punto a una línea recta dada, y conserva todos los otros axiomas de Euclides. De estas hipótesis, deduce una serie de teoremas entre los cuales es imposible encontrar una contradicción, y construye una geometría tan impecable en su lógica como la geometría euclidiana. Los teoremas son muy distintos, sin embargo, de aquellos a los que estamos acostumbrados, y, al principio, podríamos encontrarlos un poco desconcertantes. Por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que dos ángulos rectos, y la diferencia entre esa suma y dos ángulos rectos es proporcional al área del triángulo. Es imposible construir una figura similar a una figura dada pero de dimensiones distintas. Si la circunferencia de un círculo es dividida en *n* partes iguales, y se trazan tangentes en los puntos de intersección, las *n* tangentes formarán un polígono si el radio del círculo es lo suficientemente pequeño, pero si el radio es lo suficientemente grande, nunca se encontrarán. No necesitamos multiplicar los ejemplos. Las proposiciones de Lobachevski no tienen relación con las de Euclides, pero están, no obstante, lógicamente interconectadas.

La geometría de Riemann. Imaginemos un mundo poblado con seres que no tengan grosor, y supongamos que estos animales "infinitamente planos" están todos en uno y el mismo plano, del cual no pueden emerger. Admitamos también que este mundo es lo suficientemente distante de otros mundos, de manera que no recibe su influencia, y, mientras hacemos estas hipótesis, no nos costará mucho dotar a estos seres de razonamiento, y de creer que son capaces de construir una geometría. En tal caso, sin

[‡] Véase *Sobre las hipótesis que se encuentran en las bases de la geometría*, traducción mía publicada en esta misma serie o colección. Nota del Traductor.

duda atribuirían sólo dos dimensiones al espacio. Pero ahora supongamos que estos animales imaginarios, mientras permanecen sin grosor, tienen la forma de una esférica - y no de una figura plana -, y están todos en la misma esfera, de la cual no pueden escapar. ¿Qué tipo de geometría construirían? En primer lugar, es claro que atribuirían al espacio sólo dos dimensiones. La línea recta para ellos sería la distancia más corta, desde un punto en la esfera, a otro, es decir, un arco de un gran círculo. En pocas palabras, su geometría sería una geometría esférica. Lo que ellos laman espacio sería la esfera en la que están confinados, y en donde tienen lugar todos los fenómenos con los que están familiarizados. Su espacio sería, por tanto, *ilimitado*, debido a que en una esfera uno siempre puede caminar hacia delante sin llegar a detenerse, y, sin embargo, sería *finito*; el final nunca sería encontrado, pero se puede hacer el tour completo. Pues bien, la geometría de Riemann es una geometría esférica extendida a tres dimensiones. Para construirla, el matemático alemán tuvo primero que tirar por la borda, no sólo el postulado de Euclides, sino también el primer axioma que afirma que *sólo una línea puede pasar a través de dos puntos*. En una esfera, a través de dos puntos dados, podemos, *en general*, únicamente trazar un gran círculo que, como hemos visto, sería una línea recta para nuestros seres imaginarios. Pero había una excepción. Si los dos puntos dados se encontraban en los extremos de un diámetro, podía ser trazado a través de ellos un número infinito de grandes círculos. De la misma manera, en la geometría de Riemann - por lo menos en una de sus formas -, a través de dos puntos solamente puede ser trazada, en general, una línea recta, pero existen casos excepcionales en donde, a través de dos puntos, pueden ser trazadas un número infinito de líneas rectas. De manera que existe una especie de oposición entre las geometrías de Riemann y Lobachevski. Por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos en la geometría de Euclides, menor que dos ángulos rectos en la de Lobachevski, y mayor que dos ángulos rectos en la de Riemann. El número de líneas paralelas que pueden ser trazadas a través de un punto dado a una línea dada, es uno en la geometría de Euclides, ninguno en la de Riemann, y un número infinito en la geometría de Lobachevski. Añadamos que el espacio de Riemann es finito, aunque ilimitado en el sentido que hemos dado antes a estas palabras.

Superficies con curvatura constante. Sin embargo, una objeción sigue siendo posible. No existe contradicción entre los teoremas de Lobachevski y Riemann; pero, no obstante cuán numerosas sean las otras consecuencias que estos geómetras han deducido de sus hipótesis, tuvieron que detener su curso antes de agotarlas todas, porque, de otra forma, su número sería infinito; y quién puede decir que, de haber llevado sus deducciones más lejos, no hubieran llegado a una contradicción. Esta dificultad no existe para la geometría de Riemann, siempre que esté limitada a dos dimensiones. Como hemos visto, la geometría de dos dimensiones de Riemann, en realidad, no difiere de la geometría esférica, que es únicamente una rama de la geometría ordinaria, y está, por tanto, fuera de toda contradicción. Beltrami, al demostrar que la geometría de dos dimensiones de Lobachevski era sólo una rama de la geometría ordinaria, también ha refutado la objeción en lo que se refiere a este punto. Este es el curso de su argumento: Consideremos cualquier figura sobre una superficie. Imaginemos esta figura trazada sobre un lienzo flexible e inextensible aplicado a la superficie, de tal suerte que, cuando el lienzo es desplazado y deformado, las distintas líneas de la figura cambian su forma sin cambiar su longitud. Como regla general, esta figura flexible e inextensible no puede ser desplazada sin dejar la superficie. Pero existen ciertas superficies para las cuales tal movimiento sería posible. Si retomamos la comparación que hemos hecho ahora, e imaginamos seres sin grosor viviendo sobre una de estas superficies, considerarían como posible el movimiento de una figura cuyas todas sus líneas se conservan en una longitud constante. Tal movimiento parecería absurdo, por otra parte, a animales sin grosor viviendo sobre una superficie de curvatura variable. Estas superficies de curvatura constante son de dos tipos. La curvatura de algunos es *positiva*, y pueden ser deformados para ser aplicados a una esfera. La geometría de estas superficies se reduce, por tanto, a la geometría esférica, a saber, a la de Riemann. La curvatura de otros es *negativa*. Beltrami ha demostrado que la geometría de estas superficies es idéntica a la de Lobachevski. Así, las geometrías de dos dimensiones de Riemann y Lobachevski están conectadas con la geometría de Euclides.

Interpretación de las geometrías no euclidianas. Así, se desvanece la objeción relativa a las geometrías de dos dimensiones. Sería fácil extender el razonamiento de Beltrami a geometrías de tres dimensiones, y las mentes que no reculan ante el espacio de cuatro dimensiones no verían dificultad alguna en ello; pero tales mentes son reducidas en número. Prefiero, por lo tanto, proceder de otra manera. Consideremos un cierto plano, que llamaré el plano fundamental, y construyamos una especie de diccionario al hacer una serie doble de términos, escrita en dos columnas y correspondiente la una con la otra, así como en los diccionarios ordinarios las palabras en dos lenguajes, que tienen el mismo significado, corresponden una con la otra.

Espacio … … … La porción de espacio situada por encima del plano fundamental.
Plano … … … Esfera cortando ortogonalmente al plano fundamental.
Línea … … … Círculo cortando ortogonalmente al plano fundamental.
Esfera … … … Esfera.
Círculo … … … Círculo.
Ángulo … … … Ángulo.
Distancia entre dos puntos … … … Logaritmo de la razón anarmónica de estos dos puntos y de la intersección del plano fundamental con el círculo pasando a través de estos dos puntos y cortándolo ortogonalmente.
Etc. … … … Etc.

Tomemos ahora los teoremas de Lobachevski y traduzcámoslos con la ayuda de este diccionario, así como traduciríamos un texto en alemán con la ayuda de un diccionario Alemán-Francés. *Obtendríamos, entonces, los teoremas de la geometría ordinaria*. Por ejemplo, el teorema de Lobachevski: “La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos”, puede ser traducido como sigue: “Si un triángulo curvilíneo tiene como sus lados arcos de círculos que, si producidos, cortarían ortogonalmente el plano fundamental, la suma de los ángulos de este triángulo curvilíneo sería menor que dos ángulos rectos”. Así, no importa qué tan lejos sean llevadas las consecuencias de las hipótesis de Lobachevski, nunca se llegará a una contradicción; de hecho, si dos de los teoremas de Lobachevski fuesen contradictorios, las traducciones de estos dos teoremas, hechas con la ayuda de nuestro diccionario, serían también contradictorias. Pero estas traducciones son teoremas de geometría ordinaria, y nadie duda que la geometría ordinaria está exenta de contradicción. ¿De dónde deriva la certeza y qué tanto está justificada? Esta es una cuestión en la que no puedo entrar, pero es una cuestión sumamente interesante, y que pienso yo, no es insoluble. No queda nada, por tanto, de la objeción que formulé arriba. Pero esto no es todo. La geometría de Lobachevski, si es susceptible a una interpretación concreta, deja de ser un ejercicio lógico inútil, y puede perfectamente ser aplicada. No tengo tiempo aquí para tratar con estas aplicaciones, ni con lo que el Sr. Klein y yo hemos hecho al usar estas aplicaciones en la integración de ecuaciones lineales. Además, esta interpretación no es única, y varios diccionarios pueden ser construidos de manera análoga al de arriba, lo que nos permitiría, a partir de una simple traducción, convertir los teoremas de Lobachevski en teoremas de la geometría ordinaria.

Axiomas implícitos. ¿Son los axiomas implícitos en nuestros libros de texto el único fundamento de la geometría? Podemos estar seguros de lo contrario cuando observamos que, en la medida en que son abandonados uno después de otro, todavía permanecen algunas proposiciones comunes a las geometrías de Euclides, Lobachevski, y Riemann. Estas proposiciones deben estar basadas en premisas que los geómetras admiten sin necesidad de enunciación alguna. Es interesante probarlas y extraerlas de las pruebas clásicas.

John Stuart Mill afirmó que cada definición contiene un axioma, porque, cuando definimos, implícitamente afirmamos la existencia del objeto definido. Eso es ir demasiado lejos. Es muy raro en matemáticas que una definición sea dada sin seguirla con la prueba de la existencia del objeto definido, y cuando esto no se hace, generalmente es porque el lector puede fácilmente suplirla; y no debe olvidarse que la palabra "existencia" no tiene el mismo significado cuando se refiere a una entidad matemática que cuando se refiere a un objeto material.

Una entidad matemática existe siempre que no haya una contradicción implicada en su definición, ya sea en sí misma, o con las proposiciones previamente admitidas. Pero si la observación de John Stuart Mill no puede ser aplicada a todas las definiciones, es, no obstante, verdadera para algunas de ellas. Un plano es a veces definido de la siguiente forma: El plano es una superficie tal que la línea que une a cualesquiera dos puntos sobre él yace totalmente sobre esa superficie. Ahora bien, obviamente hay un nuevo axioma oculto en esta definición. Es verdad que podemos cambiarlo, y eso sería preferible, pero entonces tendríamos que enunciar al axioma de manera explícita. Otras definiciones pueden dar lugar a reflexiones no menos importantes, tal como, por ejemplo, la que se refiere a la igualdad de dos figuras. Dos figuras son iguales cuando pueden ser superpuestas. Para superponerlas, una debe ser desplazada hasta que coincida con la otra. ¿Pero cómo debe ser desplazada? Si hacemos esa pregunta, sin duda nos responderían que esto debe ser hecho sin deformar la figura, e igual que como se desplaza un sólido invariable. El círculo vicioso sería entonces evidente. De hecho, esta definición no define nada. No tiene sentido para un ser viviendo en un mundo en donde sólo haya fluidos. Si parece clara para nosotros, es porque estamos acostumbrados a las propiedades de los sólidos naturales que no difieren mucho de las propiedades de los sólidos ideales, cuyas dimensiones son invariables en ambos tipos. No obstante lo imperfecta que pueda ser, esta definición implica un axioma. La posibilidad de movimiento de una figura invariable no es una verdad evidente por sí misma. Al menos, sólo es así en la aplicación al postulado de Euclides, y no como lo sería una intuición analítica *a priori*. Es más, cuando estudiamos las definiciones y las pruebas de la geometría, vemos que estamos obligados a admitir, sin prueba alguna, no sólo la posibilidad de este movimiento, sino también algunas de sus propiedades. Esto surge primero en la definición de la línea recta. Muchas definiciones defectuosas han sido dadas, pero la verdadera es la que está entendida en todas las pruebas en donde interviene la línea recta: “Puede suceder que el movimiento de una figura invariable sea tal que todos los puntos de la línea perteneciente a la figura sean inmóviles, mientras que todos los puntos situados fuera de la línea estén en movimiento. Tal línea sería llamada una línea recta”. En esta enunciación, deliberadamente hemos separado la definición del axioma que implica. Muchas pruebas como aquellas de los casos de la igualdad de los triángulos, de la posibilidad de trazar una perpendicular desde un punto hasta una línea recta, asumen proposiciones cuyas enunciaciones están dispensadas, porque necesariamente implican que es posible mover una figura en el espacio en cierto modo.

La cuarta geometría. Entre estos axiomas explícitos, hay uno que me parece merecer alguna atención, porque cuando lo abandonamos, podemos construir una cuarta geometría tan coherente como las de Euclides, Lobachevski, y Riemann. Para probar que siempre podemos trazar una perpendicular en un punto *A* a una línea recta *AB*, consideremos una línea recta *AC* movible sobre el punto *A*, e, inicialmente, idéntica a la línea recta fijada *AB*. Entonces podemos hacer que gire alrededor del punto *A* hasta que yazca en la *AB* producida. Así, asumimos dos proposiciones - primero, que tal rotación es posible, y después, que puede continuar hasta que las dos líneas yazcan la una en la otra producida. Si el primer punto se concede y el segundo se rechaza, llegamos a una serie de teoremas incluso más extraños que aquellos de Lobachevski y Riemann, pero igualmente libres de contradicción. Solamente enunciaré uno de estos teoremas, y no escogeré al menos notable. *Una línea recta real puede ser perpendicular a sí misma*.

El teorema de Lie. El número de axiomas implícitamente introducidos en las pruebas clásicas es mayor que lo necesario, y sería interesante reducirlos a un mínimo. Podría preguntarse, en primer lugar, si esta reducción es posible, es decir, si el número de axiomas necesarios y el de las geometrías imaginables no es infinito. Un teorema enunciado por Sophus Lie[§] resulta de gran importancia en esta discusión. Puede ser enunciado de la siguiente manera: Supongamos que las siguientes premisas son admitidas: (1) el espacio tiene n dimensiones; (2) el movimiento de una figura invariable es posible; (3) p condiciones son necesarias para determinar la posición de esta figura en el espacio.

El número de geometrías compatibles con estas premisas sería limitado.

Puedo incluso añadir que, si n es dado, puede ser asignado un límite superior a p. Si, por lo tanto, se concede la posibilidad de movimiento, únicamente podemos inventar un número finito y más bien restringido de geometrías tridimensionales.

Las geometrías de Riemann. Sin embargo, este resultado parece ser contradicho por Riemann, porque este científico construyó un número infinito de geometrías, y aquella con la que usualmente se asocia su nombre es sólo un caso particular de ellas. Todo depende, decía, de la manera en que esté definida la longitud de la curva. Ahora bien, existe un número infinito de maneras de definir esta longitud, y cada una de ellas puede ser el punto de partida de una nueva geometría. Esto es perfectamente cierto, pero la mayoría de estas definiciones son incompatibles con el movimiento de una figura variable tal como la que asumimos como posible en el teorema de Lie. Estas geometrías de Riemann, tan interesantes por diversos motivos, no pueden nunca ser, por consiguiente, puramente analíticas, y no se prestarían a pruebas análogas a las de Euclides.

[§] Sophus Lie (1842-1899) fue un eminente matemático noruego. Nota del Traductor.

Sobre la naturaleza de los axiomas. La mayoría de los matemáticos considera la geometría de Lobachevski como una simple curiosidad lógica. Algunos de ellos han ido incluso más lejos. Si varias geometrías son posibles, dicen, ¿es cierto que nuestra geometría es la verdadera? Sin duda, el experimento nos enseña que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, pero esto se debe a que tratamos con triángulos que son muy pequeños. De acuerdo con Lobachevski, la diferencia es proporcional al área del triángulo, ¿y esto no sería apreciable si operásemos sobre triángulos mucho más grandes, y cuando nuestras mediciones sean más precisas? La geometría de Euclides sería, así, una geometría provisional. Ahora bien, para discutir este punto de vista, debemos, antes que nada, preguntarnos, ¿cuál es la naturaleza de los axiomas geométricos? ¿Son intuiciones sintéticas *a priori*, como lo afirmó Kant? Entonces estarían impuestas sobre nosotros con tal fuerza que no podríamos concebir una posición contraria, ni podríamos construir sobre ella un edificio teórico. No habría, pues, geometría no euclidiana. Para convencernos de esto, tomemos una verdadera intuición sintética *a priori*; la siguiente, por ejemplo, que desempeño un papel importante en el primer capítulo: Si un teorema es verdadero para el número 1, y si ha sido probado que es verdadero para $n+1$, siempre que sea verdadero para n, será verdadero para todos los enteros positivos. Tratemos ahora de deshacernos de esto, y mientras rechazamos esta proposición, construyamos una aritmética falsa análoga a la geometría no euclidiana. No seríamos capaces de hacerlo. Incluso podríamos estar tentados, al principio, a considerar estas intuiciones como analíticas. Además, para retomar nuestra ficción de animales sin grosor, apenas podríamos admitir que estos seres, si sus mentes son como las nuestras, adoptarían la geometría euclidiana, que estaría contradicha por toda su experiencia. ¿Debemos, por tanto, concluir que los axiomas de la geometría son verdades experimentales? El caso es que no hacemos experimentos sobre líneas ideales o círculos ideales; solamente podemos hacerlos sobre objetos materiales. Por tanto, ¿en qué estarían basados los experimentos - sirviendo como un fundamento - para la geometría? La respuesta es fácil. Hemos visto arriba que constantemente razonamos como si las figuras geométricas se comportaran como sólidos. Lo que la geometría toma del experimento serían por tanto las propiedades de estos cuerpos. Las propiedades de la luz y su propagación en una línea recta también han dado lugar a algunas proposiciones geométricas, y, en particular, a aquellas de la geometría proyectiva, de tal forma que, desde este punto de vista, uno estaría tentado a decir que la geometría métrica es el estudio de los sólidos, y la geometría proyectiva de la luz. Pero sigue habiendo una dificultad, que es además insuperable. Si la geometría fuese una ciencia experimental, no sería una ciencia exacta. Estaría sujeta a una continua revisión. Más aún, sería probada como errónea desde ese día en adelante, porque sabemos que no existe ningún sólido rigurosamente invariable. *Los axiomas geométricos no son, por tanto, ni intuiciones sintéticas a priori ni hechos experimentales*. Son convenciones. Nuestra elección entre todas las posibles convenciones está *guiada* por los hechos experimentales; pero se mantiene *libre*, y está solamente limitada por la necesidad de evitar toda contradicción, y es así como sus postulados pueden mantenerse rigurosamente verdaderos incluso cuando las leyes experimentales que han determinado su adopción sean sólo aproximadas. En otras palabras, *los axiomas de la geometría* (no hablo de aquellos de la aritmética) *son sólo definiciones disfrazadas*. Qué debemos, entonces, pensar de la cuestión: ¿es verdadera la geometría euclidiana? Esto no tiene sentido preguntarlo. Podemos también preguntar si el sistema métrico es verdadero, y si los viejos pesos y medidas son falsas; si las coordenadas cartesianas son verdaderas y las coordenadas polares falsas. Una geometría no puede ser más cierta que otra; únicamente puede ser más conveniente. Ahora bien, la geometría euclidiana es, y seguirá siendo, la más conveniente; primero, porque es la más simple, y no lo es sólo por nuestros hábitos mentales o por el tipo de intuición directa que tenemos del espacio euclidiano; es la más simple por sí misma, de la misma manera que un polinomio de primer grado es más simple que un polinomio de segundo grado; segundo, porque concuerda lo suficiente con las propiedades de los sólidos naturales, aquellos cuerpos que podemos comparar y medir por medio de nuestros sentidos.

CAPÍTULO IV

ESPACIO Y GEOMETRÍA

Empecemos con una pequeña paradoja. Los seres cuyas mentes fueron hechas como las nuestras, y con sentidos como los nuestros, pero sin cualquier educación preliminar, pueden recibir - de un mundo externo adecuadamente escogido - impresiones que los llevarían a construir una geometría distinta a la de Euclides, y a localizar los fenómenos de este mundo externo en un espacio no euclidiano, o incluso en un espacio de cuatro dimensiones. En cuanto a nosotros, cuya educación ha sido hecha por nuestro mundo real, si fuésemos súbitamente transportados a este nuevo mundo, no tendríamos dificultad alguna en referir los fenómenos a nuestro espacio euclidiano. Quizá pueda haber alguien, algún día, que dedique su vida a ello, y sea capaz de representarse una cuarta dimensión.

Espacio geométrico y espacio representativo. A menudo se dice que las imágenes que formamos de los objetos externos están localizadas en el espacio, e incluso que sólo pueden formarse bajo esta condición. También se dice que este espacio, que nos sirve así como una especie de marco ya preparado para nuestras sensaciones y representaciones, es idéntico al espacio de los geómetras, teniendo todas las propiedades de ese espacio. Para todo hombre lúcido que piense de esta manera, la declaración anterior podría parecerle extraordinaria; pero es tan bueno para ver si no son las víctimas de alguna ilusión que pueda ser disipada por un análisis más detallado. En primer lugar, ¿cuáles son las propiedades del espacio propiamente dicho? Me refiero a ese espacio que es el objeto de la geometría, y al que llamaré espacio geométrico. Los siguientes son algunos de los más esenciales:

Primero, es continuo; segundo, es infinito; tercero, es de tres dimensiones; cuarto, es homogéneo - esto es, todos sus puntos son idénticos uno con el otro -; quinto, es isotrópico. Ahora comparemos esto con el marco de nuestras representaciones y sensaciones, al que llamaré *espacio representativo*.

Espacio visual. Antes que nada, consideremos una impresión puramente visual, debida a una imagen formada en la parte posterior de la retina. Un análisis superficial nos muestra esta imagen como continua, pero como poseyendo únicamente dos dimensiones, lo que ya distingue lo puramente visual de lo que puede ser llamado espacio geométrico. Por otra parte, la imagen está encerrada dentro de un marco limitado; y hay una diferencia no menos importante: *este espacio puramente visual no es homogéneo*. Todos los puntos sobre la retina, aparte de las imágenes que pueden ser formadas, no desempeñan el mismo papel. La mancha amarilla no puede ser, de ninguna manera, considerada como idéntica a un punto sobre el borde de la retina. No solamente el mismo objeto produce en ella impresiones mucho más brillantes, sino que, si consideramos todo el marco *limitado*, el punto que ocupa el centro no aparecerá idéntico a un punto cercano a uno de los bordes. Sin duda, un análisis más detallado mostrará que esta continuidad en el espacio visual y sus dos dimensiones no son más que una ilusión. Este análisis haría al espacio visual todavía más distinto del espacio geométrico, pero podemos considerar a esta observación como incidental.

Sin embargo, la vista nos permite apreciar la distancia, y, por tanto, percibir una tercera dimensión. Pero cualquiera sabe que esta percepción de la tercera dimensión se reduce a un sentido del esfuerzo de acomodación que debe hacerse, y a un sentido de la convergencia de los dos ojos, que debe tener lugar para poder percibir un objeto distintivamente. Estas son sensaciones musculares muy distintas de las sensaciones visuales que nos han proporcionado el concepto bidimensional. Por lo tanto, no nos parecerá que la tercera dimensión desempeñe el mismo papel que las otras dos. Lo que puede llamarse un *espacio visual completo* no es entonces un espacio isotrópico. Tiene, es cierto, exactamente tres dimensiones, lo que significa que los elementos de nuestras sensaciones visuales (por lo menos los que concurren en formar el concepto de extensión) estarán completamente definidos si conocemos tres de ellos; o, en lenguaje matemático, serán funciones de tres variables independientes. Pero veamos esta cuestión un poco más cerca. La tercera dimensión es revelada a nosotros en dos formas distintas: por el esfuerzo de acomodación, y por la convergencia de los ojos. No hay duda que estas dos indicaciones están siempre en armonía; existe entre ellas una relación constante; o, en lenguaje matemático, las dos variables que miden a estas dos sensaciones musculares no nos aparecen como independientes. O, de nuevo, para evitar apelar a ideas matemáticas que son más bien refinadas, podemos volver al lenguaje del capítulo anterior y enunciar el mismo hecho como sigue: Si dos sensaciones de convergencia *A* y *B* son indistinguibles, las dos sensaciones de acomodación *A’* y *B’*, que respectivamente las acompañan, serán también indistinguibles. Pero esto es, por decirlo de alguna manera, un hecho experimental. Nada nos previene, *a priori*, de asumir lo contrario, y si lo contrario tiene lugar, si estas dos sensaciones musculares varían de forma independiente, debemos entonces tomar en cuenta una variable independiente más, y el espacio visual completo nos parecerá un continuo físico de cuatro dimensiones. Y así, en esto también hay un hecho de experimento *externo*. Nada nos previene de asumir que un ser con una mente como la nuestra, con los mismos órganos sensitivos que los nuestros, pueda ser puesto en un mundo en donde la luz sólo lo alcance después de haber pasado a través de complicados medios de refracción. Las dos indicaciones que nos permiten apreciar distancias dejarían de estar conectadas por una relación constante. Un ser educando sus sentidos en tal mundo no dudaría en atribuir cuatro dimensiones al espacio visual completo.

Espacio táctil y motor. El "espacio táctil" es todavía más complicado que el espacio visual, y difiere aún más ampliamente del espacio geométrico. Es inútil repetir, para el sentido del tacto, mis observaciones sobre el sentido de la vista. Pero fuera de los datos de la vista y el tacto, existen otras sensaciones que contribuyen tanto o más a la génesis del concepto del espacio. Son aquellas que todo mundo conoce, que acompañan todos nuestros movimientos, y que usualmente llamamos sensaciones musculares. El marco correspondiente constituye lo que puede llamarse *espacio motor*. Cada músculo da lugar a una sensación especial, que puede ser incrementada o disminuida, de manera que el agregado de nuestras sensaciones musculares dependerá de tantas variables como músculos tengamos. Desde este punto de vista, *el espacio motor tendrá tantas dimensiones como músculos tengamos*. Sé que se dice que si las sensaciones musculares contribuyen a formar el concepto de espacio, es porque tenemos el sentido de *dirección* de cada movimiento, y que esto es una parte integral de la sensación. Si esto fuese así, y si un sentido muscular no pudiese ser a menos que estuviese acompañado por este sentido de dirección geométrica, el espacio geométrico ciertamente sería una forma impuesta a nuestra sensitividad. Pero cuando analizo mis sensaciones, no veo esto de ninguna forma. Lo que sí veo es que las sensaciones que corresponden a movimientos en la misma dirección están conectadas en mi mente por una simple *asociación de ideas*. Es así como se reduce esta asociación que llamamos sentido de dirección. No podemos, por tanto, descubrir este sentido en una única sensación. Esta asociación es extremadamente compleja, porque la contracción del mismo músculo puede corresponder, de acuerdo con la posición de los miembros, a movimientos de dirección muy diferentes. Es más, es evidente que esto es adquirido; es, como todas las asociaciones de ideas, el resultado de un *hábito*. Este hábito, por sí mismo, es el resultado de un gran número de *experimentos*, y, no cabe duda, si la educación de nuestros sentidos hubiese tenido lugar en un medio distinto, donde pudimos haber estado sujetos a diferentes impresiones, entonces hubiésemos adquirido hábitos contrarios, y nuestras sensaciones musculares hubieran sido asociadas de acuerdo con otras leyes.

Características del espacio representativo. Así, el espacio representativo en su triple forma - visual, táctil y motor - difiere esencialmente del espacio geométrico. No es ni homogéneo ni isotrópico; ni siquiera podemos decir que es tridimensional. A menudo se dice que nosotros “proyectamos” en el espacio geométrico los objetos de nuestra percepción externa; que los “localizamos”. Ahora bien, ¿tiene esto algún significado? Y si es así, ¿cuál es? ¿Significa que nos *representamos* objetos externos en el espacio geométrico? Nuestras representaciones son sólo la reproducción de nuestras sensaciones; no pueden ser, por tanto, acomodadas en el mismo marco, es decir, en un espacio representativo. Es igualmente imposible para nosotros representarnos objetos externos en un espacio geométrico así como es imposible para un pintor pintar sobre una superficie plana objetos tridimensionales. El espacio representativo es sólo una imagen del espacio geométrico, una imagen deformada por una especie de perspectiva, y solamente podemos representarnos objetos al hacer que éstos obedezcan a las leyes de esta perspectiva. Así, no nos *representamos* cuerpos externos en el espacio geométrico, sino que *razonamos* sobre estos cuerpos como si estuviesen situados en el espacio geométrico. Cuando se dice, por otra parte, que “localizamos” tal objeto en tal punto del espacio, ¿qué se quiere decir realmente? *Simplemente significa que nos representamos los movimientos que deben tener lugar para alcanzar tal objeto*. Y no significa que, para representarnos estos movimientos, éstos tengan que estar proyectados en el espacio, y que el concepto de espacio deba, por tanto, preexistir. Cuando digo que nos representamos estos movimientos, simplemente me refiero a que nos representamos las sensaciones musculares que los acompañan, que no tienen carácter geométrico alguno, y que, por tanto, de ninguna manera implican la preexistencia del concepto de espacio.

Cambios de estado y cambios de posición. Pero, puede decirse, si el concepto de espacio geométrico no está impuesto sobre nuestras mentes, y si, por otra parte, ninguna de nuestras sensaciones puede proporcionarnos ese concepto, ¿cómo es que existe? Esto es lo que tenemos que examinar ahora, y tomará algún tiempo; pero puedo resumir, en unas pocas palabras, el intento de explicación que desarrollaré: *Ninguna de nuestras sensaciones, aislada, pudo habernos dado el concepto de espacio; somos llevados a él únicamente al estudiar las leyes por las cuales aquellas sensaciones se suceden unas a otras*. Primero vemos que nuestras sensaciones están sujetas al cambio; pero dentro de estos cambios que comprobamos, rápidamente podemos hacer una distinción. A veces decimos que los objetos, las causas de estas impresiones, han cambiado su estado, a veces que han cambiado su posición, que solamente han sido desplazados. Ya sea que un objeto cambie su estado o sólo su posición, esto siempre es traducido por nosotros de la misma manera, a saber, *por una modificación en un agregado de impresiones*. ¿Cómo es entonces que hemos sido capaces de distinguirlos? Si únicamente hubiera cambios de posición, podríamos restaurar el agregado primario de impresiones al hacer movimientos que nos confrontaran con el objeto movible en la misma situación *relativa*. Así, *corregimos* la situación que ha sido producida, y reestablecemos el estado inicial por una modificación inversa. Si, por ejemplo, fuese una cuestión de la vista, y si un objeto fuese desplazado ante nuestros ojos, podríamos “seguirlo con los ojos”, y retener su imagen en el mismo punto de la retina a partir de movimientos adecuados del globo del ojo. Estamos conscientes de estos movimientos porque son voluntarios, y porque están acompañados por sensaciones musculares. Pero esto no significa que nos los podamos representar en un espacio geométrico. De manera que lo que caracteriza el cambio de posición, lo que lo distingue del cambio de estado, es que siempre puede ser *corregido* por estos medios. Puede entonces suceder que pasemos del agregado de impresiones *A* al agregado *B* de dos distintas formas. Primero, involuntariamente y sin experimentar sensaciones musculares - lo que sucede cuando es el objeto el que es desplazado -; segundo, voluntariamente y con sensaciones musculares - lo que sucede cuando el objeto está inmóvil, pero nos desplazamos de tal forma que el objeto tiene un movimiento relativo con respecto a nosotros -. Si esto es así, la traducción del agregado *A* al agregado *B* es sólo un cambio de posición. Se sigue que la vista y el tacto no nos pudieron haber dado la idea del espacio sin la ayuda del “sentido muscular”. No solamente no pudo haber derivado este concepto de una única sensación, o incluso de una *serie de sensaciones*; sino que un ser *inmóvil* nunca podría adquirirlo, porque, al no ser capaz de corregir, por sus movimientos, los efectos del cambio de posición de los objetos externos, no tendría ninguna razón para distinguirlos de los cambios de estado. Ni hubiera sido capaz de adquirir este concepto si sus movimientos no fuesen voluntarios, o si no estuvieran acompañados por cualquier sensación.

Condiciones de compensación. ¿Cómo es tal compensación posible, de tal forma que dos cambios, de otra manera mutuamente independientes, puedan ser recíprocamente corregidos? Una mente *ya familiarizada con la geometría* razonaría como sigue: Si debe haber compensación, las diferentes partes de los objetos externos por una parte, y las diferentes partes de nuestros sentidos, por otra, deben estar en la misma posición *relativa* después del doble cambio. Y para que esto sea el caso, las diferentes partes del cuerpo externo por una parte, y los diferentes órganos de nuestros sentidos, por otra, deben tener la misma posición relativa las unas con las otras después del doble cambio; y así con las diferentes partes de nuestro cuerpo con respecto a unas con otras. En otras palabras, el objeto externo, en el primer cambio, debe ser desplazado como sería desplazado un sólido invariable, y también debe ser así con la totalidad de nuestro cuerpo en el segundo cambio, que debe corregir al primero. Bajo estas condiciones, puede producirse la compensación. Pero nosotros, que todavía no sabemos nada de geometría, y cuyas ideas del espacio aún no están formadas, no podemos razonar de este modo; no podemos predecir *a priori* si la compensación es posible. Pero el experimento nos demuestra que algunas veces tiene lugar, y comenzamos, desde este hecho experimental, a distinguir cambios de estado de cambios de posición.

Cuerpos sólidos y geometría. Dentro de los objetos que nos rodean, existen algunos que frecuentemente experimentan desplazamientos que pueden ser corregidos por un movimiento *correlativo* de nuestro propio cuerpo, a saber, los *cuerpos sólidos*. Los otros objetos, cuya forma es variable, solamente padecen un desplazamiento similar en circunstancias excepcionales (cambio de posición sin cambio de forma). Cuando tiene lugar el desplazamiento de un cuerpo con deformación, nos es imposible ya, a partir de movimientos apropiados, poner los órganos de nuestro cuerpo en la misma situación *relativa* con respecto a este cuerpo; no podemos más, por tanto, reconstruir el agregado primario de impresiones.

Es sólo más tarde, y después de una serie de nuevos experimentos, que podemos aprender cómo descomponer un cuerpo de forma variable en elementos más pequeños tal que cada uno sea desplazado de manera aproximada de acuerdo con las mismas leyes de los cuerpos sólidos. De esta manera, distinguimos “deformaciones” de otros cambios de estado. En estas deformaciones, cada elemento experimenta un simple cambio de posición que puede ser corregido; pero la modificación del agregado es más profunda, y ya no puede ser corregida por un movimiento correlativo. Tal concepto es muy complejo incluso en esta etapa, y ha sido relativamente lento en su apariencia. No hubiera sido concebido de ninguna manera si de antemano la observación de los cuerpos sólidos no nos hubiese mostrado cómo distinguir cambios de posición.

Si, por tanto, no hubiese cuerpos sólidos en la naturaleza, no habría geometría.

Otra observación requiere un momento de atención. Supongamos un cuerpo sólido ocupando, de manera sucesiva, las posiciones α y β; en la primera posición, nos dará un agregado de impresiones *A*, y en la segunda posición el agregado de impresiones *B*. Que ahora haya un segundo cuerpo sólido, de cualidades completamente distintas al primero (de diferente color, por ejemplo). Asumamos que pasa de la posición α, donde nos da el agregado de impresiones *A’*, a la posición β, donde nos da el agregado de impresiones *B’*. En general, el agregado *A* no tendrá nada en común con el agregado *A’*, ni el agregado *B* tendrá nada en común con el agregado *B’*. La transición del agregado *A* al agregado *B*, y la del agregado *A’* al agregado *B’* son, por tanto, dos cambios en donde, *en sí mismos*, en general no tienen nada en común. Aún así consideramos ambos cambios como desplazamientos; y, más aún, los consideramos como el *mismo* desplazamiento. ¿Cómo puede ser esto? Es simplemente porque ambos pueden ser corregidos por el *mismo* movimiento correlativo de nuestro cuerpo. El “movimiento correlativo”, por consiguiente, constituye la *única conexión* entre dos fenómenos que de otra forma nunca hubiéramos siquiera soñado en conectar.

Por otra parte, nuestro cuerpo, gracias al número de sus articulaciones y músculos, puede tener una multitud de distintos movimientos, pero no todos son capaces de “corregir” una modificación de objetos externos; aquellos movimientos, por sí mismos, son capaces de ello en la medida en que todo nuestro cuerpo, o por lo menos todos aquellos en donde los órganos de nuestros sentidos entran en juego, son desplazados *en bloque*, es decir, sin ningún tipo de variación de sus posiciones relativas, como en el caso de un cuerpo sólido.

Para resumir:

1. En primer lugar, distinguimos dos categorías de fenómenos: los primeros, involuntarios, sin estar acompañados por sensaciones musculares, y atribuidos a objetos

externos - son, pues, cambios externos -; los segundos, de carácter opuesto y atribuidos a los movimientos de nuestro propio cuerpo, son, pues, cambios internos.

2. Notamos que ciertos cambios de cada una de estas categorías puede ser corregido por un cambio correlativo de la otra categoría.

3. Distinguimos, entre los cambios externos, aquellos que tienen una correlativa en la otra categoría (que llamamos desplazamientos); y, de la misma forma, distinguimos, entre los cambios internos, aquellos que tienen una correlativa en la primera categoría.

Así, por medio de esta reciprocidad, se define una clase particular de fenómenos llamados desplazamientos. *Las leyes de estos fenómenos son el objeto de la geometría*.

Leyes de homogeneidad. La primera de estas leyes es la ley de homogeneidad. Supongamos que, debido a un cambio externo, pasamos del agregado de impresiones *A* al agregado *B*, y que después este cambio α es corregido por un movimiento voluntario correlativo β, de manera que somos llevados de vuelta al agregado *A*. Supongamos ahora que otro cambio externo α’ nos lleva de nuevo del agregado *A* al agregado *B*. El experimento nos demuestra que este cambio α’, como el cambio α, puede ser corregido por un movimiento voluntario correlativo β’, y que este movimiento β’ corresponde a las mismas sensaciones musculares que el movimiento β que corrigió a α.

Este hecho es usualmente enunciado como sigue: *El espacio es homogéneo e isotrópico*. También podemos decir que un movimiento que es una vez producido puede ser repetido una segunda y una tercera vez, y así sucesivamente, sin variación alguna de sus propiedades. En el primer capítulo, en donde discutimos la naturaleza del razonamiento matemático, vimos la importancia que debemos dar a la posibilidad de repetir la misma operación indefinidamente. La virtud del razonamiento matemático se debe a su repetición; por medio de la ley de la homogeneidad, los hechos geométricos son aprehendidos. Para estar completa, a la ley de la homogeneidad se le debe añadir una multitud de otras leyes, en cuyos detalles no me propongo entrar, pero que los matemáticos resumen al decir que estos desplazamientos forman un “grupo”.

El mundo no euclidiano. Si el espacio geométrico fuese un marco impuesto sobre *cada* una de nuestras representaciones consideradas individualmente, sería imposible representarnos una imagen sin este marco, y seríamos incapaces de cambiar nuestra geometría. Pero este no es el caso; la geometría es solamente el sumario de las leyes por las cuales estas imágenes se suceden unas a otras. No hay nada, por tanto, que nos prevenga de imaginar una serie de representaciones, similar en cada forma a nuestras representaciones ordinarias, pero sucediéndose unas a otras de acuerdo con leyes que difieren de aquellas a las que estamos acostumbrados. Podemos así concebir que seres cuya educación haya tenido lugar en un medio cuyas leyes sean tan diferentes, puedan tener una geometría muy distinta a la nuestra.

Supongamos, por ejemplo, un mundo encerrado en una gran esfera y sujeto a las siguientes leyes. La temperatura no es uniforme; es mayor en el centro, y disminuye gradualmente a medida que nos movemos hacia la circunferencia de la esfera, donde es cero absoluto. La ley de esta temperatura es como sigue: Si R es el radio de la esfera, y r la distancia del punto considerado desde el centro, la temperatura absoluta será proporcional a $R^2 - r^2$. Además, supondré que en este mundo todos los cuerpos tienen el mismo coeficiente de dilatación, de manera que la dilatación lineal de cualquier cuerpo es proporcional a su temperatura absoluta. Finalmente, asumiré que un cuerpo transportado de un punto a otro de distinta temperatura, se encuentra instantáneamente en un equilibrio termal con su nuevo medio ambiente. No hay nada en estas hipótesis que sea contradictorio o inimaginable. Un objeto en movimiento se volverá cada vez más pequeño a medida que se acerca a la circunferencia de la esfera. Observemos, en primer lugar, que, aunque desde el punto de vista de nuestra geometría ordinaria este mundo sería finito, a sus habitantes les parecería infinito. A medida que se acercan a la superficie de la esfera, se vuelven más fríos, y al mismo tiempo cada vez más pequeños. Los pasos que dan son, por tanto, cada vez más pequeños de manera que nunca podrán alcanzar el límite de la esfera. Si para nosotros la geometría es sólo el estudio de las leyes de acuerdo con la cual se mueven sólidos invariables, para estos seres imaginarios será el estudio de las leyes del movimiento de sólidos *deformados por las diferencias de temperatura* a las que ya aludimos.

Sin duda, en nuestro mundo, los sólidos naturales también experimentan variaciones de forma y volumen debido a diferencias de temperatura. Pero al establecer los fundamentos de la geometría, omitimos estas variaciones; porque además de ser pequeñas son irregulares, y, consecuentemente, nos aparecen como accidentales. En nuestro mundo hipotético en donde esto ya no es el caso, las variaciones obedecerán a reglas muy simples y regulares. Por otra parte, las distintas partes sólidas de las cuales están compuestos los cuerpos de estos habitantes, experimentarán las mismas variaciones de cuerpo y volumen.

Permítanme hacer una hipótesis más: supongamos que la luz pasa a través de medios de distintos índices refractivos, de tal forma que el índice de refracción es inversamente proporcional a $R^2 - r^2$. Bajo estas condiciones, es claro que los rayos de luz ya no serán rectilíneos sino circulares. Para justificar lo que se ha dicho, debemos probar que ciertos cambios en la posición de los objetos externos pueden ser corregidos por movimientos correlativos de los seres que habitan este mundo imaginario; y de tal manera que pueda ser restaurado el agregado primario de las impresiones experimentadas por estos seres sensitivos. Supongamos, por ejemplo, que un objeto es desplazado y deformado, no como un sólido invariable, sino como un sólido sujeto a dilataciones desiguales en exacta conformidad con la ley de temperatura asumida arriba. Para usar una abreviación, podemos llamar a tal movimiento un desplazamiento no euclidiano.

Si un ser sensitivo se encuentra en la proximidad de tal desplazamiento del objeto, sus impresiones serán modificadas; pero al moverse de una forma adecuada, podrá reconstruirlas. Para este propósito, todo lo que se requiere es que el agregado del ser sensitivo y el objeto, considerado como formando un único cuerpo, experimenten alguno de esos desplazamientos especiales que recién he llamado no euclidianos. Esto es posible si suponemos que los miembros de estos seres se dilatan de acuerdo con las mismas leyes de los otros cuerpos del mundo que habitan.

Aunque desde el punto de vista de nuestra geometría ordinaria exista una deformación de los cuerpos en este desplazamiento, y aunque sus distintas partes ya no estén en la misma posición relativa, podemos ver que las impresiones de los seres sensitivos siguen siendo las mismas que antes; de hecho, aunque las distancias mutuas de las distintas partes hayan variado, las partes que al principio estaban en contacto siguen estando en contacto. Se sigue que las impresiones táctiles permanecerán sin cambios. Estos seres imaginarios serán llevados, por tanto, a clasificar los fenómenos que observa, y a distinguir entre ellos los "cambios de posición", que pueden ser corregidos por un movimiento voluntario correlativo, tal como hacemos nosotros.

Si construyen una geometría, no será como la nuestra, que es el estudio de los movimientos de nuestros sólidos invariables; será más bien el estudio de los cambios de posición que han así distinguido, y serán "desplazamientos no euclidianos", y *esto será geometría no euclidiana*. De tal forma que seres como nosotros, educados en tal mundo, no tendrán la misma geometría que nosotros.

El mundo de cuatro dimensiones. Así como nos hemos representado un mundo no euclidiano, podemos representar un mundo de cuatro dimensiones.

El sentido de la luz, incluso con un ojo, junto con las sensaciones musculares relativas a los movimientos del globo del ojo, serán suficientes para permitirnos concebir un espacio de tres dimensiones. Las imágenes de los objetos externos están pintadas sobre la retina, que es un plano de dos dimensiones; estas son *perspectivas*. Pero como el ojo y los objetos son movibles, vemos, en sucesión, diferentes perspectivas del mismo cuerpo tomado desde distintos puntos de vista. Encontramos, al mismo tiempo, que la transición de una perspectiva a otra está comúnmente acompañada por sensaciones musculares. Si la transición de la perspectiva *A* a la perspectiva *B*, y la de la perspectiva *A'* a la perspectiva *B'* están acompañadas por las mismas sensaciones musculares, las conectamos tal como hacemos otras operaciones de la misma naturaleza. Después, cuando estudiamos las leyes de acuerdo con las cuales están combinadas estas operaciones, vemos que forman un grupo, que tiene la misma estructura que la de los movimientos de sólidos invariables. Ahora bien, hemos visto que es, desde las propiedades de este grupo, que derivamos la idea de espacio geométrico y la de tres dimensiones. Entendemos así cómo estas perspectivas dieron lugar a la concepción de tres dimensiones, aunque cada perspectiva sea sólo de dos dimensiones, debido a que *se suceden unas a otras de acuerdo con ciertas leyes*. Pues bien, de la misma manera que hemos trazado la perspectiva de una figura tridimensional sobre un plano, también podemos trazar la de una figura de cuatro dimensiones sobre un lienzo de tres (o dos) dimensiones. Para un geómetra, esto es un juego de niños. Incluso podemos trazar varias perspectivas de la misma figura desde varios y distintos puntos de vista. Fácilmente podemos representarnos estas perspectivas, debido a que son sólo de tres dimensiones. Imaginemos que las distintas perspectivas de un único y mismo objeto ocurren en sucesión, y que la transición de una a otra está acompañada por sensaciones musculares. Se entiende que consideraríamos a dos de estas transiciones como dos operaciones de la misma naturaleza cuando estén asociadas con las mismas sensaciones musculares. No hay nada, pues, que nos prevenga de imaginar que estas operaciones están combinadas de acuerdo con cualquier ley que escojamos, por ejemplo, al formar un grupo con la misma estructura que la de los movimientos de un sólido invariable de cuatro dimensiones. En esto, no hay nada que no nos podamos representar, y, más aún, estas sensaciones son aquellas que experimentaría un ser que tenga una retina de dos dimensiones, y que pueda ser desplazado en un espacio de cuatro dimensiones. En este sentido, podemos decir que podemos representarnos la cuarta dimensión.

Conclusiones. Es visto que el experimento desempeña un papel considerable en la génesis de la geometría, pero sería un error concluir de esto que la geometría es, aunque sea parcialmente, una ciencia experimental. Si fuese experimental, sólo podría ser aproximativa y provisoria. ¡Y qué aproximación tan tosca sería! La geometría sería únicamente el estudio de los movimientos de cuerpos sólidos; pero, en realidad, no está interesada en los sólidos naturales: su objeto es ciertos sólidos ideales, absolutamente invariables, que son una gran simplificación y una imagen muy remota de aquellos. El concepto de estos cuerpos ideales es completamente mental, y el experimento es sólo la oportunidad que nos permite alcanzar la idea. El objeto de la geometría es el estudio de un "grupo" particular; pero el concepto general de grupo preexiste en nuestras mentes, por lo menos potencialmente. Está impuesto en nosotros no como una forma de nuestra sensitividad, sino como una forma de nuestro entendimiento; de entre todos los grupos posibles, solamente debemos escoger uno que sea el *estándar*, para decirlo de alguna manera, al que refiramos los fenómenos naturales.

El experimento nos guía en esta elección, que no está impuesta sobre nosotros. No nos dice cuál es la geometría más verdadera, sino la más conveniente. Debe notarse que mi descripción de estos mundos fantásticos no ha requerido otro lenguaje que el de nuestra geometría ordinaria. Después, fuimos transportados a aquellos mundos, y no hubo necesidad de cambiar tal lenguaje. Los seres educados ahí, sin duda, encontrarían más conveniente crear una geometría diferente de la nuestra, y mejor adaptada a sus impresiones; pero en cuanto a nosotros, en la presencia de las mismas impresiones, es cierto que no encontraríamos más conveniente hacer un cambio.

CAPÍTULO V

EXPERIMENTO Y GEOMETRÍA

1. He intentado en varias ocasiones, en las páginas precedentes, demostrar cómo los principios de la geometría no son hechos experimentales, y que, en particular, el postulado de Euclides no puede ser probado por experimento alguno. No obstante cuán convincentes me hayan parecido las razones dadas, siento que debo insistir en ellas, porque existe una concepción abismalmente falsa arraigada profundamente en muchas mentes.

2. Pensemos en un círculo material, midamos su radio y circunferencia, y veamos si la proporción de las dos longitudes es igual a π. ¿Qué hemos hecho? Hemos hecho un experimento sobre las propiedades de la materia con la que ha sido realizada esta *redondez,* y de la cual se hace la medida que usamos.

3. *Geometría y astronomía*. La misma cuestión puede también ser preguntada de otra forma. Si la geometría de Lobachevski es verdadera, el paralaje de una estrella muy distante sería finito. Si la de Riemann es verdadera, sería negativo. Estos son los resultados que parecen al alcance del experimento, y se espera que las observaciones astronómicas nos permitan decidir entre estas dos geometrías. Pero lo que llamamos una línea recta en astronomía es simplemente el camino de un rayo de luz. Si, por tanto, descubriésemos paralajes negativos, o probásemos que todos los paralajes son mayores que un cierto límite, tendríamos que hacer una elección entre dos conclusiones: podríamos renunciar a la geometría euclidiana, o podríamos modificar las leyes de la óptica, y suponer que la luz no se propaga rigurosamente en una línea recta. No es necesario añadir que cualquiera consideraría esta solución como la más ventajosa. La geometría euclidiana, por tanto, no tiene nada que temer de los nuevos experimentos.

4. ¿Podemos sostener que ciertos fenómenos, que son posibles en el espacio euclidiano, serían imposibles en un espacio no euclidiano, de tal forma que el experimentar en establecer estos fenómenos directamente contradeciría la hipótesis no euclidiana? Pienso que tal pregunta no puede hacerse seriamente. Para mí, es exactamente equivalente a lo siguiente, cuyo absurdo es obvio: Existen longitudes que pueden ser expresadas en metros y centímetros, pero no pueden ser medidas en brazas, pies, y pulgadas; de manera que el experimento, al comprobar la existencia de estas

longitudes, directamente contradeciría esta hipótesis, a saber, que hay brazas divididas en seis pies. Veamos la cuestión un poco más cerca. Asumo que la línea recta en el espacio euclidiano posee cualesquiera dos propiedades, a las que llamaré *A* y *B*; que en el espacio no euclidiano todavía posee la propiedad *A*, pero ya no la propiedad *B*; y, finalmente, asumo que en ambos espacios la línea recta es la única línea que posee la propiedad *A*. Si esto fuese así, el experimento sería capaz de decidir entre las hipótesis de Euclides y Lobachevski. Se encontraría que algún objeto concreto, sobre el cual podemos experimentar - por ejemplo, un haz de rayos de luz -, posee la propiedad *A*. Concluiríamos que es rectilíneo, y después nos empeñaríamos en encontrar si posee, o no, la propiedad *B*. Pero *esto no es así*. No existe propiedad alguna que pueda, como esta propiedad *A*, ser un criterio absoluto que nos permita reconocer la línea recta, y distinguirla de cualquier otra línea. ¿Debemos decir, por ejemplo, "Esta propiedad será la siguiente: la línea recta es una línea tal que una figura de la cual es parte esta línea se puede mover sin que las distancias mutuas de sus puntos varíen, y de tal forma que todos los puntos en esta línea recta se mantengan fijos"? Ahora bien, esta es una propiedad que en cualquiera de los dos espacios (euclidiano o no euclidiano) pertenece a la línea recta, y pertenece a ella sola. ¿Pero cómo podemos comprobar, a partir del experimento, si pertenece a cualquier objeto concreto particular? Las distancias deben medirse, ¿y cómo sabemos que cualquier magnitud concreta que hemos medido con nuestros instrumentos materiales representa realmente la distancia abstracta? Únicamente hemos suprimido la dificultad un poco más lejos. En realidad, la propiedad que he enunciado no es sólo una propiedad de la línea recta; es una propiedad de la línea recta y de la distancia. Para que sirva como un criterio absoluto, debemos ser capaces de demostrar no sólo que no pertenece también a cualquier otra línea que no sea la línea recta y la distancia, sino también que no pertenece a cualquier otra línea que la línea recta, y a cualquier otra magnitud que no sea la distancia. Ahora, esto no es cierto, y si no estamos convencidos por estas consideraciones, reto a cualquiera a que me dé un experimento concreto que pueda ser interpretado en el sistema euclidiano, y que no pueda serlo en el sistema de Lobachevski. Como estoy consciente que este reto nunca será aceptado, puedo concluir que ningún experimento estará en contradicción con el postulado euclidiano; pero, por otra parte, ningún experimento estará en contradicción con el postulado de Lobachevski.

5. Pero no es suficiente que la geometría euclidiana (o no euclidiana) no pueda nunca ser directamente contradicha por el experimento. Ni podría suceder que sólo

pueda estar de acuerdo con el experimento por una violación del principio de razón suficiente, y por el de la relatividad del espacio. Déjenme explicar esto. Consideremos cualquier sistema material. Debemos considerar, por una parte, el “estado” de los diversos cuerpos de este sistema (por ejemplo, su temperatura, su potencial eléctrico, etc.); y, por otra parte, su posición en el espacio. Y entre los datos que nos permiten definir esta posición, distinguimos las distancias mutuas de estos cuerpos que definen sus posiciones relativas, y las condiciones que definen la posición absoluta del sistema y su orientación absoluta en el espacio. La ley de los fenómenos que será producida en este sistema dependerá del estado de estos cuerpos y de sus distancias mutuas; pero debido a la relatividad y a la inercia del espacio, no dependerán de la posición y orientación absolutas del sistema. En otras palabras, el estado de los cuerpos y sus distancias mutuas dependerán únicamente, en cualquier momento, del estado de los mismos cuerpos y de sus distancias mutuas en el momento inicial, pero de ninguna manera dependerán de la posición inicial absoluta del sistema y de su orientación inicial absoluta. Esto es lo que llamaremos, por el bien de la abreviación, *la ley de relatividad*.

Hasta ahora he hablado como un geómetra euclidiano. Pero he dicho que un experimento, cualquiera que sea, requiere una interpretación sobre la hipótesis euclidiana; igualmente requiere una sobre la hipótesis no euclidiana. Pues bien, hemos hecho una serie de experimentos. Los hemos interpretado sobre la hipótesis euclidiana, y hemos reconocido que estos experimentos así interpretados no violan esta “ley de relatividad”. Ahora los interpretamos sobre la hipótesis no euclidiana. Esto siempre es posible, sólo que las distancias no euclidianas de nuestros distintos cuerpos en esta nueva interpretación no serán, por lo general, las mismas que las distancias euclidianas en la interpretación primaria. ¿Estará nuestro experimento, interpretado de esta nueva forma, todavía en concordancia con nuestra “ley de relatividad”? Y, si este acuerdo no ha tenido lugar, ¿tendremos el derecho a decir que ese experimento ha probado la falsedad de la geometría no euclidiana? Es fácil ver que esto es un miedo en vano. En realidad, para aplicar la ley de relatividad en todo su rigor, debe ser aplicada al universo entero; porque si consideramos sólo una parte del universo, y si la posición absoluta de esta parte variara, las distancias de los otros cuerpos del universo variarían igualmente; su influencia sobre la parte del universo considerada podría, por tanto, aumentar o disminuir, y esto podría modificar las leyes de los fenómenos que tienen lugar en él. Pero si nuestro sistema es el universo entero, el experimento carece de poder para proporcionarnos cualquier opinión sobre su posición y su orientación absoluta en el espacio. Todo lo que nuestros instrumentos pueden dejarnos saber, no importa cuán perfectos sean, será el estado de las diferentes partes del universo, y sus distancias mutuas. Por lo tanto, nuestra ley de relatividad puede ser enunciada como sigue: Las lecturas que podamos hacer con nuestros instrumentos en cualquier momento dado, dependerán únicamente de las lecturas que pudimos hacer sobre los mismos instrumentos en el momento inicial. Ahora tal enunciación es independiente de toda interpretación por experimentos. Si la ley es cierta en la interpretación euclidiana, será también cierta en la interpretación no euclidiana. Permítanme hacer una pequeña digresión sobre este punto. He hablado arriba de los datos que definen la posición de los distintos cuerpos del sistema. También pude haber hablado de aquellos que definen sus velocidades. Entonces debo tener que distinguir la velocidad con la que las distancias mutuas de los distintos cuerpos están cambiando, y, por otra parte, las velocidades de translación y rotación del sistema; esto es, las velocidades con las cuales cambian su posición y orientación absolutas. Para que la mente esté completamente satisfecha, la ley de relatividad tendrá que ser enunciada como sigue: El estado de los cuerpos y sus distancias mutuas en un momento dado, así como también las velocidades con las cuales están cambiando aquellas distancias en ese momento, dependerán sólo del estado de aquellos cuerpos, de sus distancias mutuas en el momento inicial, y de las velocidades con las cuales aquellas distancias cambiaban en el momento inicial. Pero no dependerán de la posición inicial absoluta del sistema, ni de su orientación absoluta, ni de las velocidades con las cuales esa posición y orientación absolutas estaban cambiando en el momento inicial. Desafortunadamente, la ley así enunciada no concuerda con los experimentos (por lo menos, como comúnmente son interpretados). Supongamos que un hombre es trasladado a un planeta, cuyo cielo está constantemente cubierto por una densa cortina de nubes, de manera que nunca puede ver las otras estrellas. En ese planeta, viviría como si éste estuviera aislado en el espacio. Pero notaría que gira, ya sea por medir su elipticidad (que normalmente se hace por medio de observaciones astronómicas, pero que también puede hacerse por medios puramente geodésicos), o por repetir el experimento del péndulo de Foucault. La rotación absoluta de este planeta podría ser claramente demostrada de esta manera. Ahora, aquí hay un hecho que sobresalta al filósofo, pero que el físico se ha visto obligado a aceptar. Sabemos que de este hecho Newton concluyó la existencia del espacio absoluto. Yo no puedo aceptar este modo de verlo. Explicaré por qué en la Parte III, ya que por el momento no es mi intención discutir esta dificultad. Debo por tanto resignarme, en la enunciación de la ley de relatividad, a incluir velocidades de cualquier tipo entre los datos que definen el estado de los cuerpos. Sea como fuese, la dificultad es la misma tanto para la geometría de Euclides como para la de Lobachevski. No necesito, por tanto, preocuparme más por eso, y sólo lo he mencionado incidentalmente. Para resumir, cualquiera sea la forma en la que lo veamos, es imposible descubrir, en el empirismo geométrico, un significado racional.

6. Los experimentos sólo nos enseñan las relaciones de los cuerpos unos con otros. No nos proporcionan (y no pueden hacerlo) las relaciones de los cuerpos y el espacio, ni las relaciones mutuas de las diferentes partes del espacio. "Sí", se podrá responder, "un único experimento no es suficiente, porque sólo nos da una ecuación con varias incógnitas, pero cuando he hecho los suficientes experimentos, tendré las suficientes ecuaciones para calcular todas mis incógnitas". Si conozco la altura del mástil principal, eso no es suficiente para poder calcular la edad del capitán. Cuando se ha medido cada fragmento de madera en un barco, se tendrán muchas ecuaciones, pero no se estará ni cerca de saber la edad del capitán. Todas las mediciones sostenidas sobre los fragmentos de madera pueden indicar sólo lo que concierne a tales fragmentos; y, similarmente, los experimentos, sin importar cuán numerosos sean, referentes sólo a las relaciones de los cuerpos unos con otros, no dirán nada acerca de las relaciones mutuas de las distintas partes del espacio.

7. ¿Se podría decir que si los experimentos tienen referencia con los cuerpos, tienen, por lo menos, referencia con las propiedades geométricas de los cuerpos? Primero, ¿qué se entiende por propiedades geométricas de los cuerpos? Asumo que es una cuestión de las relaciones de los cuerpos con el espacio. Estas propiedades, por lo tanto, no pueden ser alcanzadas por experimentos que sólo tienen referencia a las relaciones de cuerpos unos con otros, y que resulta suficiente demostrar que no puede haber alguna cuestión sobre tales propiedades. Comencemos, por tanto, por dejar en claro el sentido de la frase: propiedades geométricas de los cuerpos. Cuando digo que un cuerpo está compuesto de varias partes, presumo que estoy así enunciando una propiedad geométrica, y que será verdadera incluso si le doy el nombre impropio de puntos a las partes muy pequeñas que estoy considerando. Cuando digo que esta o aquella parte de un determinado cuerpo está en contacto con esta o aquella parte de otro cuerpo, estoy enunciando una proposición que concierne las relaciones mutuas de ambos cuerpos, y no sus relaciones con el espacio. Asumo que estarán de acuerdo conmigo en que estas no son propiedades geométricas. Estoy seguro que por lo menos

concederán que estas propiedades son independientes de todo conocimiento sobre geometría métrica. Admitiendo esto, supongamos que tenemos un cuerpo sólido formado por ocho barras de hierro delgadas, *oa, ob, oc, od, oe, of, og, oh,* conectadas en una de sus extremidades, *o*. Y consideremos un segundo cuerpo sólido - por ejemplo, una pieza de madera -, sobre la cual estén marcados tres pequeños puntos de tinta a los que llamaré α β γ. Ahora supongo que hemos encontrado que podemos poner en contacto a α β γ con *ago*; por esto me refiero a α con *a*, y al mismo tiempo a β con *g*, y a γ con *o*. Después podemos poner en contacto sucesivamente a α β γ con *bgo*, *cgo*, *dgo*, *ego*, *fgo*, después con *aho*, *bho*, *cho*, *dho*, *eho*, *fho*; y, después, α γ sucesivamente con *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa*. Ahora estas son observaciones que pueden hacerse sin tener ninguna idea de antemano sobre la forma o las propiedades métricas del espacio. No tienen referencia alguna a las "propiedades geométricas de los cuerpos". Estas observaciones no serían posibles si los cuerpos sobre los que experimentamos se moviesen en un grupo teniendo la misma estructura que el grupo de Lobachevski (es decir, de acuerdo con las mismas leyes de cuerpos sólidos en la geometría de Lobachevski). Son, por tanto, suficientes para probar que estos cuerpos se mueven de acuerdo con el grupo euclidiano; o por lo menos que no se mueven de acuerdo con el grupo de Lobachevski. Es fácil ver que puedan ser compatibles con el grupo euclidiano, porque podríamos hacer que fueran así si el cuerpo α β γ fuese un sólido invariable de nuestra geometría ordinaria en la forma de un triángulo rectángulo, y si los puntos *abcdefgh* fuesen los vértices de un poliedro formado por dos pirámides hexagonales regulares de nuestra geometría ordinaria teniendo a *abcdef* como su base común, y teniendo a *g* y a *h* como sus vértices. Supongamos ahora, en lugar de las observaciones previas, que podemos, como antes, aplicar α β γ sucesivamente a *ago, bgo, cgo, dgo, ego, fgo, aho, bho, cho, dho, eho, fho,* y después que podemos aplicar α β (y ya no más α γ) sucesivamente a *ab, bc, cd, de, ef,* y *fa*. Estas son observaciones que pudieran ser hechas si la geometría no euclidiana fuese cierta. Si los cuerpos α β γ, *oabcdefgh* fuesen sólidos invariables, si lo primero fuese un triángulo rectángulo, y lo último una pirámide hexagonal doblemente regular de dimensiones adecuadas. Estas nuevas verificaciones son, por consiguiente, imposibles si los cuerpos se mueven de acuerdo con el grupo euclidiano; pero se vuelven posibles si suponemos los cuerpos moviéndose de acuerdo con el grupo de Lobachevski. Serían por tanto suficientes para mostrar, si las llevamos a cabo, que los cuerpos en cuestión no se mueven de acuerdo con el grupo euclidiano. Y así, sin hacer hipótesis alguna sobre la forma y naturaleza del espacio, sobre las relaciones entre los cuerpos y el espacio, y sin atribuir a los cuerpos propiedad geométrica alguna, he realizado observaciones que me han permitido demostrar, en un caso, que los cuerpos experimentados se mueven de acuerdo con un grupo, cuya estructura es euclidiana, y, en el otro caso, que se mueven en un grupo cuya estructura es lobachevskiana. No puede decirse que todas las primeras observaciones constituyan un experimento probando que el espacio es euclidiano, y el segundo probando que el espacio es no euclidiano; en realidad, puede imaginarse (nótese que estoy utilizando la palabra *imaginarse*) que existen cuerpos moviéndose de tal forma como para considerar posible la segunda serie de observaciones: y la prueba es que el primer mecánico que nos encontremos la pudo haber construido si se hubiera tomado la molestia. Pero no podemos concluir, no obstante, que el espacio es no euclidiano. De la misma manera, así como los cuerpos sólidos ordinarios continuarían existiendo cuando el mecánico haya construido los extraños cuerpos que he mencionado, tendría que concluir que el espacio es tanto euclidiano como no euclidiano. Supongamos, por ejemplo, que tenemos una gran esfera con radio R, y que su temperatura disminuye desde el centro a la superficie de la esfera, de acuerdo con la ley que enuncié cuando estaba describiendo el mundo no euclidiano. Podemos tener cuerpos cuya dilatación sea despreciable, y que se comportarían como sólidos invariables ordinarios; y, por otra parte, podríamos tener cuerpos muy dilatables, que se comportarían como sólidos no euclidianos. Podríamos tener dos pirámides dobles *oabcdefgh* y *o'a'b'c'd'e'f'g'h'*, y dos triángulos α β γ y α' β' γ'. La primera pirámide doble sería rectilínea, y la segunda curvilínea. El triángulo α β γ consistiría de materia no dilatable, y el otro de materia muy dilatable. Podríamos, por tanto, hacer nuestras primeras observaciones con la pirámide doble *o' a' h'* y con el triángulo α' β' γ'.

Y después el experimento parecería demostrar, primero, que la geometría euclidiana es verdadera, y luego, que es falsa. En consecuencia, *los experimentos no tienen referencia al espacio, sino a los cuerpos.*

SUPLEMENTO

8. Para redondear el asunto, debo hablar de una cuestión muy delicada, que requiere de un desarrollo considerable, pero en donde me limitaré a resumir lo que he escrito en la *Revue de métaphysique et de morale* y en *Monist*. Cuando decimos que el espacio tiene tres dimensiones, ¿qué queremos decir con esto? Hemos visto la

importancia de estos “cambios internos” que nos son revelados por nuestras sensaciones musculares. Pueden servir para caracterizar las distintas actitudes de nuestro cuerpo. Tomemos arbitrariamente, como nuestro origen, una de estas actitudes, *A*. Cuando pasamos de esta actitud inicial a otra actitud *B*, experimentamos una serie se sensaciones musculares, y esta serie *S* de sensaciones musculares definirá a *B*. Observemos, sin embargo, que a menudo se mira a dos series *S* y *S’* como definiendo la misma actitud *B* (debido a que las actitudes inicial y final *A* y *B* se mantienen igual, las actitudes intermediarias de las sensaciones correspondientes pueden diferir). ¿Cómo podemos entonces reconocer la equivalencia de estas dos series? Porque pueden servir para compensar el mismo cambio externo, o, de manera más general, porque, cuando se trata de una cuestión de compensación para un cambio externo, una de las series puede ser remplazada por la otra. Dentro de estas series hemos distinguido aquellas que por sí mismas pueden compensar un cambio externo, y que hemos llamado “desplazamientos”. Como no podemos distinguir dos desplazamientos que se encuentran muy juntos, el agregado de estos desplazamientos presenta las características de un continuo físico. La experiencia nos enseña que son las características de un continuo físico de seis dimensiones; pero aún no sabemos cuántas dimensiones posee el espacio por sí mismo, así que antes que nada debemos responder otra pregunta. ¿Qué es un punto en el espacio? Todo mundo piensa que sabe, pero eso es una ilusión. Lo que vemos cuando tratamos de representarnos un punto en el espacio es un punto negro sobre papel blanco, un punto de tiza sobre un pizarrón, en fin, siempre un objeto. La cuestión debe por tanto ser entendida como sigue: ¿Qué quiero decir cuando digo que el objeto *B* está en el punto que un momento antes estaba ocupado por el objeto *A*? De nuevo, ¿qué criterio me permitirá reconocerlo? Me refiero a que, *aunque no me he movido* (mi sentido muscular así me los dice), mi dedo, que acaba de tocar al objeto *A*, está tocando ahora al objeto *B*. Pude haber usado otros criterios - por ejemplo, otro dedo o el sentido de la vista -, pero el primer criterio es resulta suficiente. Sé que si se responde de un modo afirmativo, todos los otros criterios darán la misma respuesta. Esto lo sé por el experimento; no lo puedo saber *a priori*. Por la misma razón, digo que el tacto no puede ser ejercido a la distancia; esta es otra forma de enunciar el mismo hecho experimental. Si digo, por el contrario, que la vista se ejerce a la distancia, significa que el criterio proporcionado por la vista puede dar una respuesta afirmativa mientras que los otros darán una negativa.

Para resumir. Para cada actitud de mi cuerpo, mi dedo determina un punto, y es esto y sólo esto lo que define un punto en el espacio. Para cada actitud corresponde, de esta manera, un punto. Pero a menudo sucede que el mismo punto corresponde a varias actitudes diferentes (en este caso, decimos que nuestro dedo no se ha movido, pero el resto de nuestro cuerpo sí). Distinguimos, por tanto, entre los cambios de actitud, aquellos en donde nuestro dedo no se ha movido. ¿Cómo llegamos a esto? Es porque, a menudo, observamos que - en estos cambios - el objeto que está en contacto con el dedo se mantiene en contacto con él. Acomodemos pues, en la misma clase, a todas las actitudes deducidas, una de la otra, por uno de los cambios que hemos así distinguido. A todas estas actitudes de la misma clase corresponde el mismo punto en el espacio. Después, a cada clase, corresponde un punto, y a cada punto una clase. Incluso puede decirse que lo que obtenemos de este experimento no es el punto, sino la clase de cambios o, mejor aún, la clase correspondiente de sensaciones musculares. Así, cuando decimos que el espacio tiene tres dimensiones, simplemente decimos que el agregado de estas clases nos aparece con las características de un continuo físico tridimensional. Después, si en lugar de definir los puntos en el espacio con la ayuda del primer dedo, uso, por ejemplo, otro dedo, ¿serán los resultados los mismos? Esto no es, de ninguna forma, evidente *a priori*. Pero, como hemos visto, el experimento nos ha mostrado que nuestros criterios están en concordancia, y esto nos permite responder de modo afirmativo. Si recurrimos a lo que hemos llamado desplazamientos, cuyo agregado forma, como hemos visto, un grupo, llegaremos a distinguir aquellos en donde un dedo no se mueve; y, por lo que ha precedido, estos son los desplazamientos que caracterizan un punto en el espacio, y su agregado formará un subgrupo de nuestro grupo. A cada subgrupo de este tipo corresponde, entonces, un punto en el espacio. Podemos estar tentados a concluir que el experimento nos ha enseñado el número de dimensiones en el espacio; pero, en realidad, nuestros experimentos se han referido no al espacio, sino a nuestro cuerpo y sus relaciones con los objetos colindantes. Lo que es más, nuestros experimentos son excesivamente crudos. En nuestra mente, preexiste la idea latente de un cierto número de grupos; estos son los grupos de los que se ocupa la teoría de Lie. ¿Cuál debemos escoger para formar una especie de estándar por la cual podamos comparar los fenómenos naturales? Y cuando este grupo es elegido, ¿cuáles de los subgrupos debemos considerar para caracterizar un punto en el espacio? El experimento nos ha guiado al mostrarnos qué elección se adapta mejor a las propiedades de nuestro cuerpo; pero aquí termina su papel.

PARTE III

FUERZA

CAPÍTULO VI

LA MECÁNICA CLÁSICA

Los ingleses enseñan mecánica como una ciencia experimental; en el continente siempre es enseñada, más o menos, como una ciencia deductiva y *a priori*. Los ingleses tienen razón, sin duda. ¿Cómo es que el otro método ha persistido por tanto tiempo? ¿Cómo es que los científicos del continente, que han intentado escapar de esta práctica de sus predecesores, no han tenido éxito en la mayoría de los casos? Por otra parte, si los principios de la mecánica sólo tienen un origen experimental, ¿no son entonces únicamente aproximados y provisorios? ¿Estaremos algún día obligados, por nuevos experimentos, a modificarlos o incluso a abandonarlos? Estas son las preguntas que naturalmente surgen, y la dificultad de solución es grande, debido al hecho de que los tratados sobre mecánica no distinguen claramente entre lo que es experimental, lo que es razonamiento matemático, lo que es convención, y lo que es hipótesis. Y esto no es todo.

1. No hay espacio absoluto, y solamente concebimos movimiento relativo; y, aún así, en la mayoría de los casos, los hechos mecánicos están enunciados como si existiese un espacio absoluto al que puedan ser referidos.

2. No hay tiempo absoluto. Cuando decimos que dos periodos son iguales, la declaración no tiene sentido, y sólo puede adquirir sentido a partir de una convención.

3. No solamente no tenemos intuición directa de la igualdad de dos periodos, sino ni siquiera tenemos intuición directa de la simultaneidad de dos eventos ocurriendo en dos lugares distintos. He explicado esto en un artículo titulado “Mesure du Temps”.

4. Finalmente, ¿no es nuestra geometría euclidiana, por sí misma, sólo un tipo de convención lingüística? Los hechos mecánicos pueden ser enunciados con referencia a

un espacio no euclidiano que resultaría menos conveniente pero tan legítimo como nuestro espacio ordinario; la enunciación sería más complicada, pero aún así posible.

Así, espacio absoluto, tiempo absoluto, e incluso la geometría no son condiciones impuestas sobre la mecánica. Todas estas cosas no existían más antes que la mecánica que el que pueda lógicamente decirse que el lenguaje francés existió antes que las verdades que puedan ser expresadas en francés. Podemos empeñarnos en enunciar la ley fundamental de la mecánica en un lenguaje independiente de todas estas convenciones; sin duda, de esta forma tendríamos una idea más clara de aquellas leyes por sí mismas. Esto es lo que ha intentado hacer el señor Andrade - en cierta medida, en cualquier caso -, en su *Leçons de mécanique physique*. Desde luego, la enunciación de estas leyes se volvería mucho más complicada, porque todas estas convenciones han sido adoptadas con el propósito de abreviar y simplificar la enunciación. Por lo que a nosotros respecta, ignoraré todas estas dificultades, no porque las pase por alto, nada más lejos de eso, sino porque han recibido la suficiente atención en las primeras dos partes del libro. Provisionalmente, entonces, debemos admitir tiempo absoluto y geometría euclidiana.

El principio de inercia. Un cuerpo que no se encuentra bajo la acción de ninguna fuerza, sólo puede moverse uniformemente en una línea recta. ¿Es esta una verdad impuesta *a priori* sobre la mente? Si es así, ¿cómo es que los griegos la ignoraron? ¿Cómo pudieron haber creído que el movimiento cesa con la causa del movimiento? O, de nuevo, que cualquier cuerpo, si no hay algo que lo prevenga, se moverá en un círculo, la más noble de todas las formas de movimiento.

Si se dice que la velocidad de un cuerpo no puede cambiar, si no hay razón para que cambie, ¿no podríamos legítimamente mantener que la posición de un cuerpo no puede cambiar, o que la curvatura de su camino no puede cambiar, sin la acción de una causa externa? ¿Es entonces el principio de inercia, que no es una verdad *a priori*, un hecho experimental? ¿Ha habido experimentos sobre cuerpos en donde no actúe fuerza alguna sobre ellos? Y, si es así, ¿cómo sabíamos que no había fuerzas actuando? El ejemplo más común es el de una bola girando por mucho tiempo sobre una tabla de mármol; pero, ¿por qué decimos que no está bajo la acción de fuerza alguna? ¿Es porque está muy lejos de todos los otros cuerpos como para experimentar cualquier acción sensible? No está más lejos de la Tierra que el aventarla libremente al aire, y todos sabemos que, en ese caso, estaría sujeta a la atracción de la Tierra. Los profesores de matemáticas usualmente pasan rápido sobre el ejemplo de la bola, pero añaden que el principio de inercia se verifica indirectamente por sus consecuencias. Esto está muy mal expresado; evidentemente quieren decir que varias consecuencias pueden ser verificadas por un principio más general, y en donde el principio de inercia es sólo un caso particular. Propondré, para este principio general, la siguiente enunciación: La aceleración de un cuerpo depende sólo de su posición y de la de los cuerpos vecinos, y de sus velocidades. Los matemáticos dirían que los movimientos de todas las moléculas materiales del universo dependen de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para dejar en claro que esta es realmente una generalización de la ley de inercia, podemos de nuevo recurrir a nuestra imaginación. La ley de inercia, como he dicho antes, no está impuesta sobre nosotros *a priori*; otras leyes serían igual de compatibles con el principio de razón suficiente. Si no actúa fuerza alguna sobre un cuerpo, en lugar de suponer que su velocidad no cambia, podríamos suponer que su posición o su aceleración no cambian.

Supongamos, por un momento, que una de estas dos leyes es una ley de la naturaleza, y sustituyámosla por la ley de inercia: ¿cuál sería la generalización natural? Un momento de reflexión nos lo demostrará. En el primer caso, podemos suponer que la velocidad de un cuerpo depende sólo de su posición y de la de los cuerpos vecinos; en el segundo caso, que la variación de la aceleración de un cuerpo depende únicamente de la posición del cuerpo y de la de los cuerpos vecinos, de sus velocidades y aceleraciones; o, en términos matemáticos, las ecuaciones diferenciales del movimiento serían del primer orden en el primer caso, y del tercer orden en el segundo.

Ahora modifiquemos nuestra suposición un poco. Supongamos un mundo análogo a nuestro sistema solar, pero uno en donde, debido a una posibilidad singular, las órbitas de todos los planetas carecen de excentricidad e inclinación; y, además, supongamos que las masas de los planetas son demasiado pequeñas como para que sus perturbaciones mutuas sean sensibles. Los astrónomos viviendo en uno de estos planetas no dudarían en concluir que la órbita de una estrella sólo puede ser circular y paralela a un cierto plano; la posición de una estrella, en un momento dado, sería por tanto suficiente para determinar su velocidad y camino. La ley de inercia que ellos adoptarían sería la primera de las dos leyes hipotéticas que mencioné.

Ahora, imaginemos que este sistema un día es atravesado por un cuerpo de vasta dimensión e inmensa velocidad proveniente de constelaciones distantes. Todas las órbitas estarían profundamente perturbadas, y nuestros astrónomos no estarían menos asombrados. Se preguntarían si esta estrella es, por sí misma, lo suficientemente capaz de hacer toda esta malicia; pero, dirían, tan pronto como haya pasado, que el orden será establecido de nuevo. Sin duda, las distancias de los planetas con respecto al sol no serán las mismas después del cataclismo, pero las órbitas serían de nuevo circulares tan pronto como la perturbadora causa haya desaparecido. Sólo cuando este turbulento cuerpo se encuentre lejos - y cuando las órbitas, en lugar de ser circulares, sean elípticas-, los astrónomos serán conscientes de su error, y se verán en la necesidad de reconstruir su mecánica.

Me he detenido en estas hipótesis, porque me parece que podemos claramente comprender nuestra ley de inercia generalizada si la oponemos a hipótesis contrarias.

¿Ha sido verificada experimentalmente esta ley de inercia? ¿Y puede ser verificada de tal forma? Cuando Newton escribió su *Principia*, ciertamente consideró esta verdad como experimentalmente adquirida y demostrada. Era así a sus ojos, no sólo desde la concepción antropomórfica a la que me referiré más adelante, sino también por el trabajo de Galileo. Se demostró así por las leyes de Kepler. De acuerdo con estas leyes, en realidad, el camino de un planeta está completamente determinado por su posición y velocidad iniciales; esto, de hecho, es lo que requiere nuestra ley de inercia generalizada.

Para que este principio sea sólo cierto en apariencia - para que no temamos que algún día deba ser remplazado por uno de los principios análogos que opuse a él justo ahora - debimos haber sido conducidos por mal camino por alguna posibilidad increíble tal como la que condujo al error a nuestros astrónomos imaginarios. Tal hipótesis es tan improbable, que no debería retrasarnos. Nadie creería que hay tales posibilidades; no hay duda que la probabilidad de que dos excentricidades sean ambas exactamente cero no es menor que la probabilidad de que una sea 0.1 y la otra 0.2. La probabilidad de un evento simple no es menor que la de uno complejo. Si, no obstante, ocurre lo primero, no debemos atribuir esto a la probabilidad; no debemos estar inclinados a creer que la naturaleza lo ha hecho deliberadamente para engañarnos. Habiendo sido descartada la hipótesis de un error de este tipo, podemos admitir que, en lo que concierne a la astronomía, nuestra ley ha sido verificada experimentalmente.

Pero la astronomía es sólo una parte de la física. ¿No debemos temer que algún día un nuevo experimento falsee la ley en algún dominio de la física? Una ley experimental está siempre sujeta a revisión; siempre podemos esperar verla remplazada por otra ley más exacta. Pero nadie piensa seriamente que esta ley sea abandonada o modificada. ¿Por qué? Precisamente porque nunca podrá ser sometida a una prueba decisiva.

En primer lugar, para que esta prueba sea completa, todos los cuerpos del universo deben regresar, con sus velocidades iniciales, a sus posiciones iniciales después de un cierto tiempo. Deberíamos después encontrar que reanudarían sus caminos originales. Pero esta prueba es imposible; solamente puede ser aplicada parcialmente, e, incluso aplicada, aún habría algunos cuerpos que no regresarían a sus posiciones originales. De esta forma, habría una explicación dispuesta para cada ruptura de la ley.

Sin embargo, esto no es todo. En la astronomía, *vemos* los cuerpos cuyo movimiento estamos estudiando, y, en la mayoría de los casos, damos por sentado que no están sujetos a la acción de otros cuerpos invisibles. Bajo estas condiciones, nuestra ley ciertamente debe ser o verificada o no. Pero no es así en la física. Si los fenómenos físicos se deben al movimiento, es al movimiento de moléculas que no podemos ver. Si, por tanto, la aceleración de los cuerpos que no podemos ver depende de algo más que de las posiciones o velocidades de otros cuerpos visibles o de moléculas invisibles, cuya existencia hemos sido llevados a admitir, no hay nada que nos prevenga de suponer que este algo más es la posición o velocidad de otras moléculas cuya existencia aún no hemos sospechado. La ley será, no obstante, salvaguardada. Permítanme expresar el mismo pensamiento en otra forma, a saber, en lenguaje matemático. Supongamos que estamos observando n moléculas, y encontramos que sus $3n$ coordenadas satisfacen un sistema de $3n$ ecuaciones diferenciales de cuarto orden (y no de segundo, como requería la ley de inercia). Sabemos que, al introducir $3n$ variables auxiliares, un sistema de $3n$ ecuaciones de cuarto orden puede ser reducido a un sistema de $6n$ ecuaciones de segundo orden. Si, entonces, suponemos que $3n$ variables auxiliares representan las coordenadas de n moléculas invisibles, el resultado es de nuevo conforme con la ley de inercia. Para resumir, esta ley, verificada experimentalmente en algunos casos particulares, puede ser extendida sin temor alguno a los casos más generales; porque sabemos que, en estos casos generales, no puede ser ni confirmada ni contradicha por el experimento.

La ley de aceleración. La aceleración de un cuerpo es igual a la fuerza que actúa sobre él dividida entre su masa. ¿Puede esta ley ser verificada por el experimento? Si es así, debemos entonces medir las tres magnitudes mencionadas en la enunciación: aceleración, fuerza, y masa. Admito que la aceleración puede ser medida, porque paso por alto la dificultad que surge de la medición del tiempo. ¿Pero cómo debemos medir la fuerza y la masa? Ni siquiera sabemos lo que son. ¿Qué es la masa? Newton respondería: "El producto del volumen y la densidad". "Sería mejor decir", responderían Thomson y Tait, "que la densidad es el cociente de la masa por el volumen". ¿Qué es la fuerza? "La fuerza es…" respondería Lagrange, "…aquello que mueve o tiende a mover un cuerpo". "Es…" de acuerdo con Kirchoff, "…el producto de la masa y la aceleración". ¿Entonces por qué no decir que la masa es el cociente de la fuerza por la aceleración? Estas dificultades son insuperables.

Cuando decimos que la fuerza es la causa del movimiento, estamos hablando sobre metafísica; y esta definición, si tuviéramos que estar contentos con ella, sería absolutamente infructífera, no conduciría absolutamente a nada. Para que una definición sea de cualquier uso, debe decirnos cómo medir la fuerza; y eso es más que suficiente, porque no es de ninguna manera necesario decir lo que la fuerza es en sí misma, ni si es la causa o el efecto del movimiento. Debemos primero por tanto definir qué es lo que se quiere decir con igualdad de dos fuerzas. ¿Cuándo son dos fuerzas iguales? Se nos dice que es cuando dan la misma aceleración a la misma masa, o cuando, actuando en direcciones opuestas, están en equilibrio. Esta definición es una farsa. Una fuerza aplicada a un cuerpo no puede ser desacoplada y aplicada a otro cuerpo, así como un motor es desacoplado de un tren y acoplado a otro. Es por tanto imposible decir qué aceleración dará tal fuerza, aplicada a tal cuerpo, a otro cuerpo si fuese aplicada a él. Es imposible decir cómo dos fuerzas, que no están actuando en direcciones exactamente opuestas, se comportarían si estuviesen actuando en direcciones opuestas. Es esta definición la que intentamos materializar, por decirlo así, cuando medimos una fuerza con un dinamómetro o con una balanza. Dos fuerzas, *F* y *F'*, que supondré, en aras de la simplicidad, actuando hacia arriba verticalmente, son aplicadas respectivamente a dos cuerpos, *C* y *C'*. Adjuntamos un cuerpo pesando *P* primero a *C* y después a *C'*; si hay equilibrio en ambos casos, concluimos que las dos fuerzas *F* y *F'* son iguales, porque ambas son iguales al peso del cuerpo *P*. ¿Pero estoy seguro que el cuerpo *P* ha mantenido su peso cuando lo transferí del primer cuerpo al segundo? Lejos de eso. Estoy seguro, más bien, de lo contrario. Sé que la magnitud del peso varía de un punto a otro, y que es mayor, por ejemplo, en el polo que en el ecuador. Sin duda la diferencia es muy pequeña, y la abandonamos en la práctica; pero una definición debe tener rigor matemático, y este rigor no existe en este caso. Lo que digo sobre el peso aplica igualmente a la fuerza del resorte de un dinamómetro, que varía de acuerdo con la temperatura y con muchas circunstancias más. Esto no es todo. No podemos decir que el peso del cuerpo *P* es aplicado al cuerpo *C* y mantiene en equilibrio la fuerza *F*. Lo que es aplicado al cuerpo *C* es la acción del cuerpo *P* sobre el cuerpo *C*. Por otra parte, el cuerpo *P* es accionado por su peso, y, por la reacción *R* del cuerpo *C* sobre *P*, las fuerzas *F* y *A* son iguales, porque están en equilibrio; las fuerzas *A* y *R* son iguales por virtud del principio de acción y reacción; y, finalmente, la fuerza *R* y el peso *P* son iguales porque están en equilibrio. De estas tres igualdades, deducimos la igualdad del peso *P* y la fuerza *F*.

Así, estamos obligados a traer a nuestra definición de la igualdad de dos fuerzas el principio de la igualdad de acción y reacción; *por tanto, este principio ya no puede seguir siendo considerado como una ley experimental, sino sólo como una definición*.

Para reconocer la igualdad de dos fuerzas, estamos entonces en posesión de dos reglas: la igualdad de dos fuerzas en equilibrio y la igualdad de acción y reacción. Pero, como hemos visto, esto no resulta suficiente, y nos vemos obligados a recurrir a una tercera regla, y a admitir que ciertas fuerzas - el peso de un cuerpo, por ejemplo - son constantes en magnitud y dirección. Pero esta tercera regla es una ley experimental. Sólo es verdadera de una forma aproximada: *es, por tanto, una mala definición*. Nos vemos entonces reducidos a la definición de Kirchoff: la fuerza es el producto de la masa y la aceleración. Esta ley de Newton, a su vez, cesa de ser considerada como un hecho experimental, y es ahora sólo una definición. Pero como definición es insuficiente, porque no sabemos qué es la masa. Nos permite, sin duda, calcular la proporción de dos fuerzas aplicadas en diferentes tiempos al mismo cuerpo, pero no nos dice nada acerca de la proporción de dos fuerzas aplicadas a dos cuerpos distintos. Para llenar el vacío, debemos recurrir a la tercera ley de Newton, la igualdad de acción y reacción, aún considerada como una definición y no como una ley experimental. Dos cuerpos, *A* y *B*, actúan uno sobre el otro; la aceleración de *A*, multiplicada por la masa de *A*, es igual a la acción de *B* sobre *A*; de la misma manera, la aceleración de *B*, multiplicada por la masa de *B*, es igual a la reacción de *A* sobre *B*. Como, por definición, la acción y la reacción son iguales, las masas de *A* y *B* están, respectivamente, en la proporción inversa de sus masas. Así se define la proporción de las dos masas, y toca al experimento verificar que la proporción sea constante.

Esto se haría muy bien si los dos cuerpos estuviesen solos y pudiesen ser abstraídos de la acción del resto del mundo; pero este no es, de ninguno modo, el caso. La aceleración de *A* no se debe únicamente a la acción de *B*, sino a la de multitud de otros cuerpos *C*, *D*,… Para aplicar la regla precedente, debemos descomponer la aceleración de *A* en muchos componentes, y descubrir cuál de estos componentes se debe a la acción de *B*. La descomposición todavía sería posible si supusiéramos que la acción de *C* sobre *A* es simplemente añadida a la de *B* sobre *A*, y que la presencia del cuerpo *C* no modifica, en modo alguno, la acción de *B* sobre *A*, o que la presencia de *B* no modifica la acción de *C* sobre *A*; es decir, si admitimos que cualesquiera dos cuerpos se atraen, que su acción mutua se da a lo largo de su unión, y que es sólo dependiente de la distancia que los separa; si, en una palabra, admitimos la *hipótesis de fuerzas centrales*.

Sabemos que para determinar las masas de los cuerpos celestes adoptamos un principio muy distinto. La ley de la gravitación nos enseña que la atracción de dos cuerpos es proporcional a sus masas; si r es la distancia que los separa, m y m' sus masas, k una constante, entonces su atracción será kmm'/r^2. Lo que estamos entonces midiendo no es la masa, la proporción de la fuerza a la aceleración, sino la masa de atracción; no la inercia del cuerpo, sino su poder de atracción. Es un proceso indirecto, cuyo uso no es indispensable teóricamente. Pudimos haber dicho que la atracción es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, sin ser proporcional al producto de las masas, que es igual a f/r^2 y no a kmm'. Si fuese así, podríamos, no obstante, al observar el movimiento *relativo* de los cuerpos celestes, ser capaces de calcular las masas de estos cuerpos.

¿Pero tenemos algún derecho para admitir la hipótesis de fuerzas centrales? ¿Es esta hipótesis rigurosamente precisa? ¿Es cierto que nunca será falseada por el experimento? ¿Quién se aventuraría a hacer tal afirmación? Y si tenemos que abandonar esta hipótesis, el edificio que ha sido tan laboriosamente erigido se vendría abajo.

Ya no tenemos ningún derecho para hablar del componente de la aceleración de *A* que se debe a la acción de *B*. No tenemos ningún medio para distinguir esto de aquello que se debe a la acción de *C* o de cualquier otro cuerpo. La regla se vuelve inaplicable para la medición de masas. ¿Qué queda entonces del principio de la igualdad de acción y reacción? Si rechazamos la hipótesis de fuerzas centrales, este principio también debe irse; la resultante geométrica de todas las fuerzas aplicadas a los distintos cuerpos de un sistema abstraído de toda acción externa sería cero. En otras palabras, *el movimiento del centro de gravedad de este sistema será uniforme y en una línea recta*. Aquí parece haber un medio para definir la masa. La posición del centro de gravedad evidentemente depende de los valores dados a las masas; debemos elegir estos valores para que el movimiento del centro de gravedad sea uniforme y rectilíneo. Esto siempre será posible si la tercera ley de Newton sigue siendo válida, y será, en general, posible sólo en una forma. Pero no existe ningún sistema abstraído de toda acción externa; cada parte del universo está sujeta, más o menos, a la acción de las otras partes. *La ley del movimiento del centro de gravedad es sólo rigurosamente cierta cuando es aplicada a todo el universo*.

Pero entonces, para obtener los valores de las masas debemos encontrar el movimiento del centro de gravedad del universo. Lo absurdo de esta conlcusión es obvio; el movimiento del centro de gravedad del universo no será siempre desconocido. No queda, por tanto, nada, y nuestros esfuerzos resultan infructíferos. No hay escapatoria de la siguiente definición, que no es más que una confesión de fracaso: *las masas son coeficientes que se ha encontrado conveniente introducir en los cálculos*.

Podríamos reconstruir nuestra mecánica al dar a nuestras masas valores distintos. La nueva mecánica no estaría en contradicción ni con el experimento, ni con los principios generales de la dinámica (el principio de inercia, la proporcionalidad de las masas y aceleraciones, igualdad de acción y reacción, movimiento uniforme del centro de gravedad en una línea recta, y áreas). Pero las ecuaciones de esta mecánica *no serían tan simples*. Comprendamos claramente esto. Sólo serían los primeros términos los que serían menos simples, es decir, aquellos que ya conocemos a través del experimento; quizá las masas pequeñas podrían verse ligeramente alteradas sin las ecuaciones *completas*, ganando o perdiendo en simplicidad.

Hertz ha indagado si los principios de la mecánica son rigurosamente ciertos: "En la opinión de muchos físicos, parece inconcebible que el experimento altere alguna vez los inexpugnables principios de la mecánica; y, aún así, lo que se debe al experimento siempre puede ser rectificado por el experimento". Por lo que hemos visto, estos miedos parecen ser infundados. Los principios de la dinámica nos parecieron al principio verdades experimentales, pero nos hemos visto obligados a usarlos como definiciones. Es *por definición* que la fuerza es igual al producto de la masa y la aceleración; este es un principio que está, de aquí en adelante, más allá del alcance de cualquier experimento futuro. Así, es por definición que la acción y la reacción son iguales y opuestas. Pero entonces se podrá decir que estos principios inverificables carecen absolutamente de cualquier significado. No pueden ser refutados por el experimento, y no podemos aprender nada de ellos que nos sea útil, ¿cuál es, pues, el sentido de estudiar dinámica? Esta rápida condena sería más bien injusta. No existe en la naturaleza ningún sistema *perfectamente* aislado, perfectamente abstraído de toda acción externa; pero existen sistemas que se encuentran *casi* aislados. Si observamos tal sistema, no sólo podemos estudiar el movimiento relativo de sus distintas partes con respecto a cada otra, sino el movimiento de su centro de gravedad con respecto a las otras partes del universo. Entonces encontramos que el movimiento de su centro de gravedad es *casi* uniforme y rectilíneo en conformidad con la tercera ley de Newton. Este es un hecho experimental, que no puede ser invalidado por un experimento más preciso. ¿Qué nos enseñaría, en realidad, un experimento más preciso? Nos enseñaría que la ley es sólo aproximadamente cierta, y eso ya lo sabemos. *Así, se explica cómo un experimento puede servir como una base para los principios de la mecánica, y aún así nunca los invalidará*.

Mecánica antropomórfica. Podría decirse que Kirchoff únicamente ha seguido la tendencia general de los matemáticos hacia el nominalismo; de esto, no lo ha salvado su habilidad como físico. Quería la definición de una fuerza, y tomó la primera que le vino en mano. Pero no requerimos una definición de fuerza: la idea de fuerza es primitiva, irreducible, indefinible; todos sabemos lo que es, porque tenemos una intuición directa de ella. Esta intuición directa surge de la idea de esfuerzo, familiar a nosotros desde la infancia. Pero, en primer lugar, incluso si esta intuición directa nos hiciera conocer la naturaleza real de la fuerza por sí misma, probaría ser una base insuficiente para la mecánica; sería, por otra parte, bastante inútil. Lo importante no está en saber qué es la fuerza, sino en cómo medirla. Todo lo que no nos enseñe cómo medirla, es tan inútil al mecánico como es tan inútil, por ejemplo, la idea subjetiva del calor y el frío al estudiante de estas materias. Esta idea subjetiva no puede ser traducida en números, y es, por tanto, inútil; un científico cuya piel sea un conductor pésimo de calor, y quien, por lo tanto, nunca haya sentido la sensación de calor o frío, interpretaría un termómetro exactamente igual a cualquier otra persona, y tendría el suficiente material para construir toda una teoría del calor.

Ahora bien, esta noción inmediata del esfuerzo no tiene uso alguno para nosotros al medir la fuerza. Es evidente, por ejemplo, que experimentaré más fatiga al levantar un peso de 100 kilos que un hombre que esté acostumbrado a levantar cargas pesadas. Pero hay más que esto. esta noción de esfuerzo no nos enseña la naturaleza de la fuerza; está, definitivamente, reducida a una recolección de sensaciones musculares, y nadie sostendría que el sol experimenta una sensación muscular cuando atrae a la Tierra. Todo lo que podemos esperar encontrar de ella (la noción) es un símbolo, menos preciso y menos conveniente que las flechas (para denotar dirección) usadas por los geómetras, e igual de distante de la realidad.

El antropomorfismo desempeña un papel histórico considerable en la génesis de la mecánica; probablemente pueda todavía proporcionarnos un símbolo que algunas mentes encuentren conveniente, pero no puede ser el fundamento de ningún carácter realmente científico o filosófico.

La Escuela del Hilo. El señor Andrade, en sus *Leçons de mécanique physique,* ha modernizado la mecánica antropomórfica. Para la escuela de mecánica con la que está identificado Kirchoff, opone una escuela pintorescamente llamada la "Escuela del Hilo".

Esta escuela intenta reducir todo a la consideración de ciertos sistemas materiales de masa despreciable, considerada en un estado de tensión y capaz de transmitir un esfuerzo considerable a cuerpos distantes (sistemas cuyo tipo ideal es la cuerda fina, el alambre, o el *hilo*). Un hilo que transmite cualquier fuerza está ligeramente alargado en la dirección de tal fuerza; la dirección del hilo nos dice la dirección de la fuerza, y la magnitud de la fuerza es medida por la longitud del hilo.

Podemos imaginar un experimento como tal de la manera que sigue: Un cuerpo A está adjuntado a un hilo; en el otro extremo del hilo, actúa una fuerza hecha para variar hasta que la longitud del hilo se incremente por α, y la aceleración del cuerpo A es entonces registrada. Después A es separada, y un cuerpo B es adjuntado al mismo hilo, y se hace actuar a la misma o a otra fuerza hasta que el incremento de la longitud sea otra vez α, y la aceleración de B es registrada. El experimento se realiza de nuevo tanto con A como con B hasta que el incremento de la longitud sea β. Las cuatro aceleraciones observadas deben ser proporcionales. Aquí tenemos una verificación experimental de la ley de aceleración enunciada arriba. De nuevo, podemos considerar un cuerpo bajo la acción de varios hilos con igual tensión, y, por experimento, determinar la dirección de aquellos hilos cuando el cuerpo está en equilibrio. Esta es una verificación experimental de la ley de composición de fuerzas. Pero, en realidad, ¿qué es lo que hemos hecho? Hemos definido la fuerza que actúa sobre la cadena por la deformación del hilo, lo que es suficientemente razonable; después hemos asumido que si el cuerpo es adjuntado a este hilo, el esfuerzo transmitido al cuerpo por el hilo es igual a la acción ejercida por el cuerpo sobre el hilo; de hecho, hemos hecho uso del principio de acción y reacción al considerarlo, no como una verdad experimental, sino como la misma definición de fuerza. Esta definición es tan convencional como la de Kirchoff, pero es mucho menos general.

Todas las fuerzas no están transmitidas por el hilo (y para compararlas, todas tendrían que ser transmitidas por hilos idénticos). Incluso si admitiéramos que la Tierra está adjuntada al sol por un hilo invisible, en cualquier caso se aceptaría que no tenemos ningún medio para medir el incremento del hilo. En consecuencia, nuestra definición sería defectuosa nueve veces de cada diez; ningún sentido de ningún tipo puede ser adjuntado a ella, y tenemos que recurrir de nuevo a la de Kirchoff. ¿Por qué entonces seguir de esta manera indirecta? Se admite una cierta definición de fuerza que tiene un significado sólo en determinados casos particulares. En aquellos casos, se verifica a partir del experimento que conduce a la ley de aceleración. En la fuerza de estos experimentos, tomamos después la ley de aceleración como una definición de fuerza en todos los demás casos.

¿No sería más fácil considerar la ley de aceleración como una definición para todos los casos, y considerar a los experimentos en cuestión, no como verificaciones de la ley, sino como verificaciones del principio de acción y reacción, o como prueba de que las deformaciones de un cuerpo elástico dependen únicamente de las fuerzas que actúan sobre ese cuerpo? Esto sería no tomar en cuenta el hecho de que las condiciones en las cuales esta definición pudiese ser aceptada sólo pueden ser cumplidas de manera imperfecta; además, un hilo nunca carece de masa, y nunca está más aislado de otras fuerzas que la reacción de los cuerpos adjuntados a sus extremidades.

Las ideas expuestas por el señor Andrade son, no obstante, muy interesantes. Si no satisface nuestros requerimientos lógicos, nos proporcionan una mejor panorámica de la génesis histórica de las ideas fundamentales de la mecánica. Las reflexiones que sugieren nos muestran cómo la mente humana pasó de un antropomorfismo ingenuo, a la presente concepción de la ciencia.

Observamos que terminamos con un experimento que es muy particular, y, en realidad, sumamente tosco, y comenzamos con una ley perfectamente general, perfectamente precisa, cuya verdad consideramos como absoluta. Le hemos conferido libremente esta certeza, por decirlo de alguna manera, al considerarla como una convención.

¿Son las leyes de la aceleración y de la composición de fuerzas únicamente convenciones arbitrarias? Convenciones, sí; arbitrarias, no (serían así si hubiéramos perdido de vista los experimentos que condujeron a los fundadores de la ciencia a adoptarlas, y que, imperfectos como lo fueron, fueron suficientes para justificar su adopción). Es bueno, de tiempo en tiempo, dejar que nuestra atención se fije en el origen experimental de estas convenciones.

CAPÍTULO VII

MOVIMIENTO RELATIVO Y ABSOLUTO

El principio de movimiento relativo. Se han realizado algunos esfuerzos para conectar la ley de aceleración con un principio más general. El movimiento de cualquier sistema debe obedecer las mismas leyes, sin importar si se refiere a ejes fijos, o a ejes movibles implicados en un movimiento uniforme en línea recta. Este es el principio de movimiento relativo, y está impuesto sobre nosotros por dos razones: el experimento más común lo confirma; la consideración de la hipótesis contraria resulta singularmente repugnante a la mente.

Admitámoslo pues, y consideremos un cuerpo bajo la acción de una fuerza. El movimiento relativo de este cuerpo con respecto a un observador moviéndose con una velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del cuerpo debe ser idéntico al que sería su movimiento absoluto si iniciase desde el reposo. Concluimos que su aceleración no debe depender de su velocidad absoluta, y de esto, intentamos deducir una ley de aceleración completa.

Por mucho tiempo, ha habido rastros de esta prueba en las regulaciones para el grado de B. ès Sc.[**] Es claro que el intento ha fallado. El obstáculo que nos impide probar la ley de aceleración es que no tenemos una definición de fuerza. Este obstáculo subsiste en su totalidad, ya que el principio invocado no nos ha proporcionado la definición faltante. El principio de movimiento relativo es, no obstante, muy interesante, y merece ser considerado por sí mismo. Intentemos enunciarlo de una manera precisa. Hemos dicho arriba que las aceleraciones de los distintos cuerpos que forman parte de un sistema aislado sólo dependen de sus velocidades y de sus posiciones relativas, y no de sus velocidades y posiciones absolutas, siempre que los ejes movibles a los que se refiere el movimiento relativo se muevan uniformemente en una línea recta; o, si se prefiere, sus aceleraciones dependen únicamente de las diferencias de sus velocidades y de las diferencias de sus coordenadas, y no de los valores absolutos de estas velocidades y coordenadas. Si este principio es cierto para aceleraciones relativas, o bien para diferencias de aceleración, al combinarlo con la ley de reacción debemos deducir que es

[**] *Bachelor of Science*. Nota del Traductor.

cierto para aceleraciones absolutas. Queda por ver cómo podemos probar que las diferencias de aceleración dependen sólo de diferencias de velocidades y coordenadas; o, para hablar en lenguaje matemático, que estas diferencias de coordenadas satisfacen ecuaciones diferenciales de segundo orden. ¿Puede deducirse esta prueba del experimento o de condiciones *a priori*? Recordando lo que hemos dicho antes, el lector podrá dar su propia respuesta. En realidad, así enunciado, el principio de movimiento relativo curiosamente se asemeja a lo que he llamado arriba el principio generalizado de inercia; no es exactamente lo mismo, debido a que es una cuestión de diferencias de coordenadas, y no de coordenadas por sí mismas. El nuevo principio nos enseña algo más que el viejo, pero aplica la misma discusión para aquel, y nos llevaría a las mismas conclusiones. No necesitamos recurrir a él.

El argumento de Newton. Aquí encontramos una cuestión muy importante ligeramente perturbadora. He dicho que el principio de movimiento relativo no era para nosotros simplemente el resultado de un experimento; y que, *a priori*, cada hipótesis contraria sería repugnante a la mente. Pero, entonces, ¿por qué el principio es verdadero sólo si el movimiento de ejes movibles es uniforme y en línea recta? Parece que debe estar impuesto sobre nosotros con la misma fuerza si el movimiento es acelerado, o, en cualquier caso, si se reduce a una rotación uniforme. En estos dos casos, de hecho, el principio no es verdadero. No necesito hacer hincapié en el caso en donde el movimiento de los ejes es rectilíneo y no uniforme. La paradoja que resulta de esto no merece momento alguno de examen. Si me encuentro en un vagón, y si el tren, golpeando contra cualquier obstáculo, se detiene súbitamente, seré proyectado al lado opuesto, aunque no haya actuado directamente fuerza alguna sobre mí. No hay nada misterioso en esto, y si no he estado sujeto a la acción de cualquier fuerza externa, el tren sí ha experimentado un impacto externo. No hay nada paradójico en el movimiento relativo de dos cuerpos siendo perturbados cuando el movimiento de uno o del otro es modificado por una causa externa. Ni necesito hacer hincapié en el caso del movimiento relativo referido a ejes que rotan uniformemente. Si el cielo estuviese siempre cubierto de nubes, y si no tuviésemos medios para observar las estrellas, podríamos, no obstante, concluir que la Tierra gira. Estaríamos advertidos de este hecho por el aplastamiento de los polos, o por el experimento del péndulo de Foucault. Y aún así, ¿habría, en este caso, algún sentido en decir que la Tierra gira? Si no hay espacio absoluto, ¿puede algo girar sin girar con respecto a algo?; y, por otra parte, ¿cómo podemos admitir la conclusión de Newton y creer en un espacio absoluto? Pero no es suficiente con declarar que todas las posibles soluciones nos resultan desagradables. Debemos analizar, en cada caso, la razón de nuestro desagrado, para poder elegir con conocimiento de causa. Debe excusarse, por tanto, la larga discusión que sigue.

Resumamos nuestra historia imaginaria. Nubes muy espesas ocultan las estrellas de los hombres que no pueden observarlas, e incluso son ignorantes de su existencia. ¿Cómo podrían saber esos hombres que la Tierra gira? Sin duda, por un periodo mucho más largo que el de nuestros ancestros, considerarían al suelo donde están parados como fijo e inamovible. Esperarían un tiempo mucho más largo que el que nosotros esperamos por la llegada de un Copérnico; pero este Copérnico llegaría al fin. ¿Cómo llegaría? En primer lugar, la escuela mecánica de este mundo no se toparía con una contradicción insalvable. En la teoría del movimiento relativo observamos, además de fuerzas reales, dos fuerzas imaginarias, que llamamos fuerza centrífuga ordinaria y fuerza centrífuga compuesta. Nuestros científicos imaginarios podrían así explicar cualquier cosa al considerar estas fuerzas como reales, y no verían en esto una contradicción del principio generalizado de inercia, porque estas fuerzas dependerían, una de las posiciones relativas de las distintas partes del sistema, tal como atracciones reales, y la otra de sus velocidades relativas, como en el caso de las fricciones reales. Sin embargo, muchas dificultades habrían atraído su atención mucho antes. Si tuvieron éxito en la realización de un sistema aislado, el centro de gravedad de este sistema no tendría un camino rectilíneo aproximado. Podrían recurrir, para explicar este hecho, a fuerzas centrífugas que considerarían como reales, y que, sin duda, atribuirían a las acciones mutuas de los cuerpos (sólo que no verían estas fuerzas desaparecer en grandes distancias), es decir, en proporción a medida que el aislamiento se realiza mejor. Lejos de esto. La fuerza centrífuga se incrementa indefinidamente con la distancia. Aquí, esta dificultad ya sería lo suficientemente seria para ellos, pero no los detendría por mucho tiempo. Pronto imaginarían algún medio muy sutil análogo a nuestro éter, del que todos los cuerpos estarían recubiertos, y que ejercería sobre ellos una acción repulsiva. Pero eso no es todo. El espacio es simétrico, aunque las leyes del movimiento no presenten simetría alguna. Serían capaces de distinguir entre derecha e izquierda. Verían, por ejemplo, que los ciclones siempre giran en la misma dirección, mientras que, por razones de simetría, deberían girar indiferentemente en cualquier dirección. Si nuestros científicos fuesen capaces, por fuerza de mucho trabajo duro, de hacer su universo perfectamente simétrico, esta simetría no subsistiría, aunque no haya alguna razón aparente por lo cual deba ser perturbada en una dirección más que en otra. Obtendrían esto, sin duda, de la situación en la que se encuentran, e inventarían algo que no sería más extraordinario que las esferas de vidrio de Ptolomeo, e irían de esta forma acumulando complicaciones hasta que el muy esperado Copérnico las barriera todas con un simple soplido, diciendo que es mucho más simple admitir que la Tierra gira. Así como nuestro Copérnico nos dijo: “Es más conveniente suponer que la Tierra gira, porque las leyes de la astronomía estarían así expresadas en un lenguaje más simple”, él les diría: “Es más conveniente suponer que la Tierra gira, porque las leyes de la mecánica estarían así expresadas en un lenguaje más simple”. Esto no impide que el espacio absoluto- es decir, el punto al cual debemos referir la Tierra para saber si realmente gira - carezca de existencia objetiva. Y por tanto la afirmación: “la Tierra gira”, no tiene significado, porque no puede ser verificada por el experimento, debido a que tal experimento no sólo no puede ser llevado a cabo o incluso soñado por el Julio Verne más atrevido, sino que no puede ser concebida sin contradicción; o, en otras palabras, estas dos proposiciones, “la Tierra gira” y “es más conveniente suponer que la Tierra gira”, tienen uno y el mismo significado. No hay nada más en una proposición que en la otra. Quizá no estarían contentos con esto, y pudieran encontrar sorprendente que, entre todas las hipótesis - o mejor, entre todas las convenciones - que pueden ser hechas sobre este tema, haya una que resulta más conveniente que el resto. Pero si hemos admitido esto sin dificultad cuando se trata de las leyes de la astronomía, ¿por qué deberíamos objetar cuando se trata de las leyes de la mecánica? Hemos visto que las coordenadas de los cuerpos están determinadas por ecuaciones diferenciales de segundo orden, y que así son las diferencias de estas coordenadas. Esto es a lo que hemos llamado el principio generalizado de inercia, y el principio de movimiento relativo. Si las distancias de estos cuerpos estuviesen determinadas de la misma manera por ecuaciones de segundo grado, la mente podría estar enteramente satisfecha. ¿Qué tanto recibe la mente esta satisfacción, y por qué no está contenta con ella? Para explicar esto, debemos mejor tomar un simple ejemplo. Asumamos un sistema análogo a nuestro sistema solar, pero en donde las estrellas fijas ajenas a este sistema no puedan ser percibidas, de tal forma que los astrónomos sólo puedan observar las distancias mutuas de los planetas y del sol, y no las longitudes absolutas de los planetas. Si deducimos directamente de la ley de Newton las ecuaciones diferenciales que definen la variación de estas distancias, estas ecuaciones no serían de segundo orden. Me refiero a que si, fuera de la ley de Newton, conociéramos los valores iniciales de estas distancias y de sus derivadas con respecto al tiempo, eso no sería suficiente para determinar los valores de estas mismas distancias en un momento ulterior. Todavía haría falta un dato, y este dato podría ser, por ejemplo, lo que los astrónomos llaman la constante de área. Pero aquí podemos ver esto desde dos puntos de vista distintos. Podemos considerar dos tipos de constantes. Para los ojos del físico, el mundo se reduce a una serie de fenómenos dependientes, por una parte, sólo de los fenómenos iniciales, y, por otra, de las leyes que conectan consecuencia y antecedente. Si la observación entonces nos enseña que una cierta cantidad es una constante, tenemos la opción de considerarla de dos maneras. Admitamos que hay una ley que requiere que esta cantidad no varíe, pero que por casualidad se ha encontrado que, en el principio del tiempo, esta cantidad tenía este valor en lugar de aquel otro, un valor que ha tenido desde entonces. Esta cantidad puede entonces ser llamada una constante *accidental*. O, de nuevo, admitamos, al contrario, que hay una ley de la naturaleza que impone sobre esta cantidad este valor y no aquel. Entonces tenemos lo que puede ser llamado una constante *esencial*. Por ejemplo, en virtud de las leyes de Newton, la duración de la revolución de la Tierra debe ser constante. Pero si es 366 y algunos días siderales, y no 300 o 400, es debido a una casualidad inicial o a otra. Es una constante *accidental*. Por otra parte, el que el exponente de la distancia que figura en la expresión de la fuerza atractiva sea igual a 2 y no a 3, obedece no a la casualidad, sino a que así lo requiere la ley de Newton. Es una constante *esencial*. No sé si esta forma de dar a la casualidad su parte sea legítima por sí misma, y si no hay alguna artificialidad en esta distinción; pero es cierto que, por lo menos en proporción, la naturaleza tiene secretos, y será estrictamente arbitraria y siempre incierta en su aplicación. En lo que concierne a la constante del área, estamos acostumbrados a considerarla como accidental. ¿Es cierto que nuestros astrónomos imaginarios harían lo mismo? Si fueran capaces de comparar dos sistemas solares distintos, tendrían la idea de que esta constante puede asumir varios valores diferentes. Pero supongo, en principio, como tengo el derecho a hacerlo, que su sistema aparecería aislado, y que no verían estrella alguna ajena a sus sistema. Bajo estas condiciones, sólo podrían detectar una única constante, que tendría un valor absoluto único e invariable. La considerarían, sin duda, como una constante esencial.

Unas palabras para anticiparme a una objeción. Los habitantes de este mundo imaginario no podrían observar ni definir la constante de área tal como hacemos nosotros, porque las longitudes absolutas escaparían a su atención; pero ello no les impediría rápidamente llegar a una cierta constante que sería introducida de manera natural en sus ecuaciones, y que no sería si no lo que nosotros llamamos la constante de área. ¿Pero entonces qué pasaría? Si la constante de área es considerada como esencial, como dependiente de una ley de la naturaleza, entonces, para calcular las distancias de los planetas en cualquier momento dado, sería suficiente con conocer los valores iniciales de estas distancias y aquellos de sus primeras derivadas. Desde este nuevo punto de vista, las distancias estarían determinadas por ecuaciones diferenciales de segundo orden. ¿Satisfaría esto las mentes de estos astrónomos por completo? Pienso que no. En primer lugar, muy pronto verían que, al diferenciar sus ecuaciones para llevarlas a un orden mayor, éstas se volverían mucho más simples, y estarían especialmente golpeados por la dificultad que surge de la simetría. Tendrían que admitir distintas leyes, dependiendo si el agregado de estos planetas presenta la figura de un cierto poliedro, o más bien de un poliedro regular, y de estas consecuencias únicamente se puede escapar si se considera a la constante de área como accidental. He tomado este ejemplo particular, porque he imaginado astrónomos que no estarían preocupados, en lo más mínimo, por la mecánica terrestre, y cuya visión estaría limitada por el sistema solar. Pero nuestras conclusiones aplican en todos los casos. Nuestro universo está más extendido que el de ellos, debido a que tenemos estrellas fijas; pero es también muy limitado, de manera que podemos razonar sobre la totalidad de nuestro universo de igual forma que lo hicieron estros astrónomos sobre su sistema solar. Vemos así que definitivamente nos vemos llevados a concluir que las ecuaciones que definen las distancias son de un orden mayor al segundo. ¿Por qué debe alarmarnos esto? ¿Por qué encontramos perfectamente natural que la secuencia de los fenómenos dependa de valores iniciales de las primeras derivadas de estas distancias, mientras que titubeamos en admitir que puedan depender de los valores iniciales de las segundas derivadas? Sólo se puede deber a nuestros hábitos mentales creados por el estudio constante del principio generalizado de inercia y de sus consecuencias. Los valores de las distancias en cualquier momento dado dependen de sus valores iniciales, de aquellos de sus primeras derivadas, y de algo más. ¿Qué es este *algo más*? Si no queremos que sea simplemente una de las segundas derivadas, sólo tenemos la opción de la hipótesis. Supongamos, como comúnmente se hace, que este algo más es la orientación absoluta del universo en el espacio, o la rapidez con la cual esta orientación varía; esta puede ser, y ciertamente lo es, la solución más conveniente para el geómetra. Pero no es la más satisfactoria para el filósofo, porque esta orientación no existe. Podemos asumir que este algo más es la posición o la velocidad de algún cuerpo invisible, y esto es lo que hacen ciertas personas, que incluso han llamado Alfa a este cuerpo, aunque estamos destinados a nunca saber nada acerca de este cuerpo excepto su nombre. Este es un artificio completamente análogo a aquel sobre el que hable al final del párrafo conteniendo mis reflexiones sobre el principio de inercia. Pero, en realidad, la dificultad es artificial. Siempre que las futuras indicaciones de nuestros instrumentos sólo puedan depender de las indicaciones que nos han dado, o que formalmente pudieron habernos dado, tal es todo lo que queremos, y con estas condiciones podemos descansar satisfechos.

CAPÍTULO VIII

ENERGÍA Y TERMODINÁMICA

Energética. Las dificultades surgidas de la mecánica clásica han llevado a ciertas mentes a preferir un nuevo sistema al que llaman energética. La energética tuvo su origen gracias al descubrimiento del principio de la conservación de la energía, al que Helmholtz dio su forma definitiva. Empecemos por definir dos cantidades que desempeñan un papel fundamental en esta teoría. Son la *energía cinética* (o *vis viva*), y la *energía potencial*. Cada cambio que los cuerpos de la naturaleza padecen está regulado por dos leyes experimentales. Primero, la suma de las energías cinética y potencial es constante. Este es el principio de la conservación de la energía. Segundo, si un sistema de cuerpos está en *A* en el tiempo t_0, y en *B* en el tiempo t_1, siempre pasa de la primera posición a la segunda por un camino tal que el valor *medio* de la diferencia entre los dos tipos de energía en el intervalo de tiempo que separa las dos épocas t_0 y t_1 es un mínimo. Este es el principio de Hamilton, y es una de las formas del principio de acción mínima. La teoría energética tiene las siguientes ventajas sobre la clásica. Primero, es menos incompleta, es decir, los principios de conservación de energía y de Hamilton nos enseñan más que los principios fundamentales de la teoría clásica, y excluyen ciertos movimientos que no ocurren en la naturaleza y que serían compatibles con la teoría clásica. Segundo, nos libera de la hipótesis atómica, que era casi imposible evadir en la teoría clásica. Pero, a su vez, surgen nuevas dificultades. Las definiciones de los dos tipos de energía dan lugar a dificultades casi tan grandes como aquellas de la fuerza y la masa en el primer sistema. Sin embargo, podemos librarnos de estas dificultades más fácilmente, y de todos modos, en los casos más simples. Asumamos un sistema aislado formado por un cierto número de puntos materiales. Asumamos también que sobre estos puntos actúan fuerzas dependientes sólo de su posición relativa y de sus distancias, e independientes de sus velocidades. En virtud del principio de conservación de energía, debe haber una función de fuerzas. En este simple caso, la enunciación del principio de conservación de energía es de una simplicidad extrema. Una cierta cantidad, que puede ser determinada experimentalmente, debe permanecer constante. Esta cantidad es la suma de dos términos. El primero depende únicamente de la posición de los puntos materiales, y es independiente de sus velocidades; el segundo es proporcional a los cuadrados de estas velocidades. Esta descomposición sólo puede tener lugar de una manera. El primero de estos términos, al que llamaré *U*, será energía potencial; el segundo, al que llamaré *T*, será energía cinética. Es verdad que si $T+U$ es constante, también lo es cualquier función de $T+U$, $\phi(T+U)$. Pero esta función $\phi(T+U)$ no será la suma de dos términos, uno independiente de las velocidades, y el otro proporcional al cuadrado de las velocidades. Entre estas funciones que permanecen constantes, sólo hay una que disfruta esta propiedad. Es $T+U$ (o una función lineal de $T+U$), no importa cuál, debido a que esta función lineal siempre puede ser reducida a $T+U$ por un cambio de unidad y de origen. Esto, entonces, es lo que llamamos energía. Al primer término lo llamaremos energía potencial, y al segundo energía cinética. La definición de los dos tipos de energía puede, por tanto, ser mantenida sin ambigüedad alguna.

Así es con la definición de masa. La energía cinética (o *vis viva*), es expresada de manera muy simple por la ayuda de las masas, y de las velocidades relativas de todos los puntos materiales con referencia a uno de ellos. Estas velocidades relativas pueden ser observadas, y cuando tenemos la expresión de la energía cinética como una función de estas velocidades relativas, los coeficientes de esta expresión nos darán las masas. De manera que en este simple caso, las ideas fundamentales pueden ser definidas sin dificultad alguna. Pero las dificultades reaparecen en los casos más complicados si las fuerzas, en lugar de depender únicamente de las distancias, dependen también de las velocidades. Por ejemplo, Weber supone que la acción mutua de dos moléculas eléctricas depende no sólo de su distancia, sino también de su velocidad y aceleración. Si los puntos materiales se atraen uno a otro de acuerdo con una ley análoga, *U* dependería de la velocidad, y podría contener un término proporcional al cuadrado de la velocidad. ¿Cómo podemos detectar, entre tales términos, aquellos que surgen de *T* o *U*? y ¿cómo, por tanto, podemos distinguir las dos partes de la energía? Pero hay más que esto. ¿Cómo podemos definir la energía por sí misma? Ya no tenemos razón alguna para tomar como nuestra definición a $T+U$ en vez de cualquier otra función de $T+U$, cuando la propiedad que caracterizaba a $T+U$ ha desaparecido; a saber, la de ser la suma de dos términos de una forma particular. Pero esto sigue sin ser todo. Debemos tener en cuenta no sólo la energía mecánica propiamente dicha, sino también otras formas de energía (calor, energía química, energía eléctrica, etc.). El principio de conservación de energía debe ser escrito como $T+U+Q=$ una constante, donde T es la energía cinética sensible, U la energía potencial de posición, dependiente sólo de la posición de los cuerpos, y Q la energía molecular interna bajo la forma térmica, química, o eléctrica. Esto sería lo adecuado si los tres términos fuesen absolutamente distintos; si T fuese proporcional al cuadrado de las velocidades, U independiente de estas velocidades y del estado de los cuerpos, Q independiente de las velocidades y de las posiciones de los cuerpos, y dependiente únicamente de su estado interno. La expresión de la energía sería, por tanto, descompuesta en una manera sólo en tres términos de esta forma. Pero este no es el caso. Consideremos los cuerpos electrizados. La energía electrostática debida a su acción mutua evidentemente dependerá de la carga (es decir, de su estado), pero igualmente dependerá de su posición. Si estos cuerpos están en movimiento, actuarán de forma electro dinámica uno sobre otro, y la energía electrodinámica dependerá no sólo de su estado y posición, sino también de sus velocidades. Por consiguiente, no tenemos medios para seleccionar los términos que deban formar parte de *T*, *U*, y *Q*, y de separar las tres partes de la energía. Si $T+U+Q$ es constante, lo mismo es cierto para cualquier función $\phi(T+U+Q)$.

Si $T+U+Q$ fuese de la forma particular que he sugerido arriba, no sobrevendría ninguna ambigüedad. Entre las funciones $\phi(T+U+Q)$ que permanecen constantes, sólo hay una que sería de esta forma particular, a saber, la que hemos acordado en llamar energía. Pero también he dicho que esto no es rigurosamente el caso. Entre las funciones que permanecen constantes hay una que puede ser rigurosamente puesta en esta forma particular. ¿Cómo podemos entonces decidir, entre ellas, aquella que deba ser llamada energía? Ya no tenemos guía alguna para nuestra elección.

Del principio de conservación de energía, no queda sino una enunciación: *hay algo que permanece constante*. Esta forma está, a su vez, fuera de los límites del experimento, y reducida a una especie de tautología. Es claro que si el mundo está gobernado por leyes, habrá cantidades que permanecen constantes. Como las leyes de Newton, y por una razón análoga, el principio de conservación de energía, al estar basado en el experimento, no puede ser invalidado por él.

Esta discusión muestra que, al pasar del sistema clásico al energético, se ha hecho algún avance; pero también muestra, al mismo tiempo, que no se ha avanzado lo suficiente.

Otra objeción parece ser incluso más seria. El principio de acción mínima es aplicable a fenómenos reversibles, pero no es, de ningún modo, satisfactorio cuando concierne a fenómenos irreversibles. Helmholtz intentó extenderlo a esta clase de fenómenos, pero no tuvo y no pudo tener éxito. En lo que concierne a esto, aún tiene que hacerse todo. La misma enunciación del principio de acción mínima es objetable. Para moverse de un punto a otro, una molécula material - sobre la que no actúa fuerza alguna, pero obligada a moverse sobre una superficie - tomará como su camino la línea geodésica, es decir, el camino más corto. Parecería que esta molécula conoce el punto que queremos que tome, prevé el tiempo que le tomará alcanzarlo por tal camino, y después sabe cómo escoger el camino más conveniente. La enunciación de este principio nos presenta a la molécula, por decirlo de alguna manera, como una entidad viva y libre. Es claro que será mejor remplazarla por una enunciación menos objetable, una en donde, como dirían los filósofos, los efectos finales no parezcan estar sustituidos por causas que actúan.

Termodinámica. El papel de los dos principios fundamentales de la termodinámica se vuelve cada día más importante en todas las ramas de la filosofía natural. Abandonando las ambiciosas teorías de hace cuarenta años, gravadas como estuvieron por las hipótesis moleculares, ahora intentamos apoyar sobre la termodinámica todo el edificio de la física matemática. ¿Asegurarán los dos principios de Mayer y Clausius a este edificio fundamentos lo suficientemente sólidos como para que se mantenga en pie por algún tiempo? Todos creemos que sí, pero ¿de dónde surge esta confianza? Un eminente físico me dijo un día, a propósito de la ley de errores: todo mundo la cree con firmeza, porque los matemáticos imaginan que es un efecto de la observación, y los observadores imaginan que es un teorema matemático. Y este fue, por mucho tiempo, el caso con el principio de la conservación de energía. No es lo mismo ahora. No hay nadie que ignore que es un hecho experimental. Pero entonces, ¿quién nos da el derecho de atribuir, al principio por sí mismo, más generalidad y más precisión que a los experimentos que han servido para demostrarlo? Esto es preguntar si es legítimo generalizar, tal como lo hacemos a diario, datos empíricos, y no seré tan temerario como para discutir esta cuestión, máxime después que tantos filósofos hayan intentado, en vano, resolverla. Una sola cosa es cierta. Si este permiso nos fuera negado, la ciencia no podría existir; o por lo menos se vería reducida a una especie de inventario, a la determinación hechos aislados. No tendría ya valor alguno para nosotros, debido a que no satisfaría nuestras necesidades de orden y armonía, y porque sería, al mismo tiempo, incapaz de predecir. Como las circunstancias que han precedido cualquier hecho no serán de nuevo, con toda probabilidad, reproducidas simultáneamente, ya requerimos una primera generalización para predecir si el hecho será renovado tan pronto como cambie la menor de estas circunstancias. Pero cualquier proposición puede ser generalizada en un número infinito de formas. Dentro de todas las generalizaciones posibles, debemos escoger, y no podemos escoger sino la más simple. Nos vemos por tanto conducidos a adoptar un curso tal como si una ley simple fuese - otras cosas siendo igual - más probable que una ley compleja. Hace un siglo, se confesaba de manera franca y se proclamaba externamente que la naturaleza ama la simplicidad; pero la naturaleza ha probado lo contrario desde entonces en más de una ocasión. Ya no confesamos esta tendencia, y sólo conservamos de ella lo que es indispensable, de tal forma que la ciencia no se vuelva imposible. Al formular una ley general, simple, y formal, basada en un número comparativamente pequeño de experimentos consistentes no necesariamente en conjunto, únicamente hemos obedecido una necesidad de la cual no puede escapar la mente humana. Pero hay algo más, y es por eso que estoy insistiendo en este tema. Nadie duda que el principio de Mayer no está llamado a sobrevivir todas las leyes particulares de las cuales se dedujo, de la misma forma que la ley de Newton ha sobrevivido las leyes de Kepler de las que derivó, y que ya no son nada sino aproximaciones, si tomamos en cuenta las perturbaciones. Ahora bien, ¿por qué entonces este principio ocupa una especie de posición privilegiada entre las leyes físicas? Hay muchas razones para ello. En principio, pensamos que no podemos rechazarlo, o incluso dudar de su absoluto rigor, sin admitir la posibilidad de movimiento perpetuo; ciertamente nos sentimos desconfiados ante tal perspectiva, y nos creemos menos precipitados al afirmar tal principio que al negarlo. Esto quizá no es tan exacto. La imposibilidad de movimiento perpetuo sólo implica la conservación de la energía para fenómenos reversibles. La imponente simplicidad del principio de Mayer contribuye igualmente a fortalecer nuestra fe. En una ley inmediatamente deducida de los experimentos, tal como la ley de Mariotte, esta simplicidad más bien nos parecería como una razón para desconfiar; pero aquí esto ya no es el caso. Tomamos elementos que, a primera vista, están desconectados, éstos se acomodan en un orden inesperado, y forman un todo armonioso. No podemos creer que esta armonía inesperada sea un simple resultado de la casualidad. Nuestra conquista parece ser valiosa en proporción a los esfuerzos que ha costado, y nos sentimos más seguros si hemos arrebatado a la naturaleza su verdadero secreto en proporción a cómo la naturaleza se ha visto más celosa en nuestros intentos por descubrirlo. Pero estas son sólo pequeñas razones. Antes de elevar la ley de Mayer a la dignidad de un principio absoluto, es necesaria una discusión más profunda. Pero si nos embarcamos en esta discusión, vemos que este principio absoluto no siquiera fácil de enunciar. En cada caso particular, claramente vemos qué es la energía, y podemos darle, por lo menos, una definición provisora; pero es imposible encontrar una definición general de ella. Si deseamos enunciar el principio en toda su generalidad y aplicarlo al universo, vemos que se desvanece, por decirlo de alguna manera, y que no queda más que esto: *hay algo que permanece constante*. ¿Pero tiene esto algún significado? En la hipótesis determinista, el estado del universo está determinado por un número *n* extremadamente grande de parámetros, a los que llamaré $x_1, x_2, x_3 ... x_n$. Tan pronto como conocemos, en un momento dado, los valores de estos *n* parámetros, también conocemos sus derivadas con respecto al tiempo, y podemos, por tanto, calcular los valores de estos mismos parámetros en un momento anterior o posterior. En otras palabras, estos *n* parámetros especifican *n* ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas ecuaciones tienen $n-1$ integrales, y, por lo tanto, hay $n-1$ funciones de $x_1, x_2, x_3 ... x_n$, que se mantienen constantes. Si decimos entonces, *hay algo que se mantiene constante*, estamos únicamente enunciando una tautología. Incluso estaríamos desconcertados para decidir, entre todas nuestras integrales, cuál es la que debería retener el nombre de energía. Además, no es en este sentido como se entiende el principio de Mayer cuando se aplica a un sistema limitado. Admitimos, entonces, que *p* de nuestros *n* parámetros varían independientemente, de manera que solamente tenemos $n-p$ relaciones, generalmente lineales, entre nuestros *n* parámetros y sus derivadas. Supongamos, en aras de la simplicidad, que la suma del trabajo hecho por las fuerzas externas es cero, así como también la de todas las cantidades de calor que se desprenden del interior. ¿Cuál sería entonces el significado de nuestro principio? *Existe una combinación de estas $n-p$ relaciones, cuyo primer miembro es un diferencial exacto*; y luego este diferencial desvaneciéndose en virtud de nuestras $n-p$ relaciones, su integral es una constante, y es esta integral a la que llamamos energía. ¿Pero cómo puede ser que haya varios parámetros cuyas variaciones son independientes? Eso sólo puede tener lugar en el caso de fuerzas externas (aunque hemos supuesto, por simplicidad, que la suma algebraica de todo el trabajo hecho por estas fuerzas se ha desvanecido). Si, en realidad, el sistema estuviese completamente aislado de cualquier acción externa, los valores de nuestros n parámetros, en un momento dado, serían suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier momento ulterior, siempre que todavía nos aferremos a la hipótesis determinista. Caemos, por tanto, de nuevo en la misma dificultad anterior. Si el estado futuro del sistema no está completamente determinado por su estado presente, es porque además depende del estado de cuerpos externos al sistema. Pero entonces, ¿es probable que exista, entre los parámetros x que definen el estado del sistema de ecuaciones, independencia de los cuerpos externos? Y si en ciertos casos pensamos que podemos encontrarla, ¿no se debe esto a nuestra ignorancia, y a que la influencia de estos cuerpos es demasiado débil como para que nuestro experimento la detecte? Si el sistema no es considerado como completamente aislado, es probable que la expresión rigurosamente exacta de su energía interna dependa del estado de los cuerpos externos. De nuevo, hemos supuesto arriba que la suma de todo el trabajo externo es cero, y si queremos librarnos de esta restricción más bien artificial, la enunciación se vuelve incluso más difícil. Para formular el principio de Mayer al darle un significado absoluto, debemos extenderlo a todo el universo, y nos encontramos entonces, cara a cara, con la misma dificultad que hemos intentado evadir. Para resumir, y para usar un lenguaje ordinario, la ley de conservación de energía únicamente puede tener un significado, porque hay en ella una propiedad común a todas las posibles propiedades; pero en la hipótesis determinista sólo hay una propiedad posible, y entonces la ley carece de significado. En la hipótesis no determinista, por otra parte, tendría un significado incluso si deseáramos considerarla en un sentido absoluto. Parecería como una limitación impuesta a nuestra libertad.

Pero estas palabras me advierten que me estoy desviando del tema, y que estoy dejando el dominio de las matemáticas y la física. Observo esto y deseo, por tanto, retener sólo una impresión de toda esta discusión, y esta es que la ley de Mayer es una forma lo suficientemente sutil como para permitirnos poner en ella casi cualquier cosa que queramos. No quiero decir con esto que no corresponde a una realidad objetiva, ni que se reduce a una mera tautología; y esto porque, en cada caso particular, y siempre que no deseemos extenderla al absoluto, tiene un significado perfectamente claro. Esta sutileza es una razón para creer que esta ley va a durar un tiempo considerable; y como, por otra parte, sólo va a desaparecer para ser mezclada en una armonía mayor, podemos trabajar con confianza y utilizarla, estando certeros de que nuestro trabajo no se perderá.

Casi todo lo que he dicho ahora aplica al principio de Clausius. Lo que lo distingue es que está expresado por una desigualdad. Podrá quizá decirse que sucede lo mismo con todas las leyes físicas, debido a que su precisión está siempre limitada por errores de observación. Pero por lo menos claman ser primeras aproximaciones, y esperamos remplazarlas, poco a poco, por leyes más exactas. Si, por otra parte, el principio de Clausius se reduce a una desigualdad, esto no es causado por la imperfección de nuestros medios de observación, sino por la misma naturaleza de la cuestión.

Conclusiones generales sobre la Parte III. Los principios de la mecánica se nos presentan, por tanto, bajo dos aspectos distintos. Por una parte, existen verdades fundadas en el experimento, y verificadas aproximadamente en lo que a sistemas casi aislados concierne. Por otra parte, existen postulados aplicables a todo el universo y considerados como rigurosamente ciertos. Si estos postulados poseen una generalidad y una certeza que falsifica las verdades experimentales de donde fueron deducidos, es porque se reducen, en último análisis, a una simple convención que tenemos derecho a hacer, porque estamos seguros, de antemano, que ningún experimento la puede contradecir. Esta convención, no obstante, no es absolutamente arbitraria; no es un producto de nuestro capricho. La admitimos porque ciertos experimentos nos han demostrado que será conveniente, y así se explica cómo los experimentos han construido los principios de la mecánica, y porque, además, no pueden hacerlos revertirlos. Hagamos una comparación con la geometría. Las proposiciones fundamentales de la geometría, como el postulado de Euclides, por ejemplo, son sólo convenciones, y es irracional preguntar si son verdaderas o falsas, así como lo es preguntar si el sistema métrico es verdadero o falso. Únicamente, estas convenciones son convenientes, y hay algunos experimentos que nos lo prueban. A primera vista, la analogía está completa: el papel del experimento parece ser el mismo. Podemos estar tentados, entonces, a decir que, o bien la mecánica debe ser vista como una ciencia experimental y que por tanto debe ser lo mismo con la geometría; o, por el contario, que la geometría es una ciencia deductiva, y lo mismo para la mecánica. Tal conclusión sería ilegítima. Los experimentos que nos han llevado a adoptar como más convenientes las convenciones fundamentales de la geometría se refieren a cuerpos que no tienen nada en común con aquellos que son estudiados por la geometría. Se refieren a las propiedades de cuerpos sólidos y a la propagación de la luz en una línea recta. Estos son experimentos mecánicos, ópticos, y de ninguna manera pueden ser considerados como experimentos geométricos. E incluso la razón probable por la cual nuestra geometría nos parece conveniente es que nuestros cuerpos, nuestras manos, y nuestros miembros comparten las propiedades de cuerpos sólidos. Nuestros experimentos fundamentales son, preeminentemente, experimentos fisiológicos que se refieren, no al espacio que es el objeto que la geometría debe estudiar, sino a nuestro cuerpo, es decir, al instrumento que usamos para tal estudio. Por otra parte, las convenciones fundamentales de la mecánica y los experimentos que nos prueban su conveniencia, ciertamente se refieren a los mismos objetos, o por lo menos a objetos análogos. Los principios convencionales y generales son las generalizaciones naturales y directas de los principios experimentales y particulares. No se diga que estoy, de esta forma, trazando fronteras artificiales entre las ciencias; que estoy separando, por una barrera, la geometría propiamente dicha del estudio de los cuerpos sólidos. También podría levantar una barrera entre la mecánica experimental y la mecánica convencional de principios generales. Quién no se da cuenta, en realidad, que al separar estas dos ciencias las mutilamos a ambas, y que lo que quedará de la mecánica convencional, cuando se encuentre aislada, será muy poco, y que no puede ser nunca comparado con el gran cuerpo doctrinario que es la geometría.

Ahora comprendemos por qué la enseñanza de la mecánica debe mantenerse como experimental. Sólo así podemos comprender el génesis de la ciencia, y eso es indispensable para un conocimiento completo de la ciencia por sí misma. Además, si estudiamos mecánica, es para poder aplicarla; y únicamente podemos aplicarla si se mantiene objetiva. Ahora bien, como hemos visto, cuando los principios ganan en generalidad y certeza, pierden en objetividad. Es, por tanto, con la parte objetiva de los principios con los que debemos estar primeramente familiarizados, y esto sólo puede ser al pasar de lo particular a lo general, en lugar de pasar de lo general a lo particular.

Los principios son convenciones y definiciones en disfraz. Son, no obstante, deducidos de leyes experimentales, y estas leyes han sido, por decirlo de alguna manera, erigidas en principios a los que nuestra mente atribuye un valor absoluto. Algunos filósofos han generalizado demasiado. Han pensado que los principios eran el todo de la ciencia, y, por tanto, que el todo de la ciencia era convencional. Esta doctrina paradójica, llamada nominalismo, no puede soportar al examen. ¿Cómo puede una ley convertirse en un principio? Expresaba una relación entre dos términos reales, *A* y *B*; pero no era rigurosamente cierta, únicamente era aproximativa. Introducimos, arbitrariamente, un término intermedio *C*, más o menos imaginario, y *C* es, *por definición*, aquello que tiene con *A exactamente* la relación expresada por la ley. De manera que nuestra ley se descompone en un principio absoluto y riguroso que expresa la relación de *A* con *C*, y en una ley aproximadamente experimental y revisable que expresa la relación de *C* con *B*. Pero es claro que, no importa qué tan lejos se lleve a cabo esta descomposición, las leyes siempre se mantendrán. Ahora debemos entrar al dominio de las leyes propiamente dichas.

PARTE IV

NATURALEZA

CAPÍTULO IX

HIPÓTESIS EN LA FÍSICA

El papel del experimento y la generalización. El experimento es la única fuente de verdad. Por sí solo puede enseñarnos algo nuevo; por sí solo puede darnos certeza. Estos son dos puntos que no pueden ser cuestionados. Pero entonces, si el experimento lo es todo, ¿qué lugar queda para la física matemática? ¿Qué puede hacer la física experimental con tal asistente - un asistente, además, que parece ser inútil, e incluso peligroso?

Sin embargo, la física matemática existe. Ha prestado un servicio innegable, y este es un hecho que requiere ser explicado. No es suficiente con observar; debemos usar nuestras observaciones, y para tal propósito debemos generalizar. Esto es lo que siempre se ha hecho, y sólo a medida que la recolección de errores pasados ha hecho al hombre cada vez más prudente, éste ha observado cada vez más y generalizado cada vez menos. Cada época ha hecho burla de su predecesor, acusándolo de haber generalizado atrevida e ingenuamente. Descartes acostumbraba compadecer a los jonios. Descartes, a su vez, nos hace sonreír, y sin duda algún día nuestros hijos se reirán de nosotros. ¿No hay manera de llegar, de una vez por todas, a la esencia del asunto, y de este modo escapar de las burlas que prevemos? ¿No podemos estar contentos con el experimento por sí mismo? No, esto es imposible, y constituiría un completo malentendido del verdadero carácter de la ciencia. El hombre de ciencia debe trabajar con un método. La ciencia se construye de hechos, así como una casa se construye de piedras; pero una acumulación de hechos no es más una ciencia que un montón de piedras una casa. Más importante que todo, el hombre de ciencia debe ser previsivo. Carlyle ha escrito en algún lugar algo como esto: “Nada es importante sino los hechos. John Lackland ha pasado por aquí. Aquí hay algo que es admirable. Aquí hay una realidad por la cual daría todas las teorías en el mundo”. Carlyle era un compatriota de Bacon, y, como él, deseaba proclamar adoración al *dios de las cosas como son*.

Pero Bacon no hubiera dicho eso. Ese es el lenguaje del historiador. El físico hubiera muy probablemente dicho: “John Lackland pasó por aquí. Todo es lo mismo para mí, porque no volverá a pasar por aquí de nuevo”.

Todos sabemos que hay buenos y malos experimentos, y que estos últimos se acumulan en vano. Ya sea que haya cientos o miles, una única pieza de trabajo hecha por un verdadero maestro - por un Pasteur, por ejemplo - será suficiente para barrerlos hacia el olvido. Bacon hubiera comprendido eso a fondo, porque el inventó la frase *experimentum crucis*; pero Carlyle no lo hubiera comprendido. Un hecho es un hecho. Un estudiante ha leído tal y tal número en su termómetro, y no ha tomado precaución alguna. No importa; él lo ha leído, y es únicamente el hecho el que cuenta; esta es una realidad que tiene tanto derecho a ser llamada una realidad como las peregrinaciones del rey John Lackland. ¿Qué es, entonces, un buen experimento? Es el que nos enseña algo más que un hecho aislado. Es el que nos permite predecir, y generalizar. Sin generalización, la predicción es imposible. Las circunstancias bajo las cuales uno ha operado nunca volverán a reproducirse simultáneamente. El hecho observado nunca será repetido. Todo lo que puede afirmarse es que, bajo circunstancias análogas, un hecho análogo será producido. Para predecirlo, debemos entonces invocar la ayuda de la analogía, es decir, incluso en esta etapa, debemos generalizar. No importa qué tan tímidos seamos, debe haber interpolación. El experimento sólo nos proporciona un cierto número de puntos aislados. Estos puntos deben ser conectados por una línea continua, y esto constituye una verdadera generalización. Pero se hace más que esto. la curva así trazada pasará entre y cerca de los puntos observados; no pasará a través de los puntos en sí mismos. Así, no estamos restringidos para generalizar nuestro experimento, sino que lo corregimos; y el físico que se abstiene de estas correcciones, y se contenta con el experimento puro y simple, estará obligado, en efecto, a enunciar leyes sumamente extraordinarias. Los hechos separados no pueden, por tanto, satisfacernos, y esto es por lo que nuestra ciencia debe ser ordenada, o, mejor aún, generalizada.

A menudo se dice que los experimentos deben hacerse libres de ideas preconcebidas. Esto es imposible. No sólo haría que cada experimento fuera infructífero, sino que incluso si quisiéramos hacerlo, nos sería imposible. Cada hombre tiene su propia concepción del mundo, y esta condición no la puede dejar de lado fácilmente. Debemos, por ejemplo, utilizar un lenguaje, y nuestro lenguaje está necesariamente lleno de ideas preconcebidas. También existen ideas preconcebidas inconscientes, que son mil veces más peligrosas que todas. ¿Debemos entonces decir, que si causamos que otras ideas - de las cuales estamos completamente conscientes - intervengan, únicamente agravaríamos este mal? No lo pienso así. Estoy más bien inclinado a pensar que nos servirían como amplios contrapesos (incluso iba a decir que servirían como antídotos). Generalmente estarán en desacuerdo, entrarán en conflicto unas con las otras, e *ipso facto*, nos forzarán a observar las cosas bajos distintos aspectos. Esto es suficiente para liberarnos. No es un esclavo quien puede escoger a su maestro.

De esta forma, por generalización, cada hecho observado nos permite predecir un gran número de otros hechos; únicamente no debemos olvidar que el primer hecho solo es cierto, y que todos los demás son meramente probables. No importa qué tan sólidamente fundada pueda parecer una predicción, nunca podemos estar *absolutamente* seguros que el experimento no probará que carece de base si nos proponemos verificarla. Pero la probabilidad de su precisión es generalmente tan grande, que prácticamente podemos estar contentos con ella. Es mucho mejor predecir sin certeza, que nunca haber predicho. Nunca debemos, por consiguiente, desdeñar la verificación cuando la oportunidad se presenta. Pero cada experimento es largo y difícil, y los trabajadores son pocos, y el número de hechos que requerimos para predecir es enorme; y, además de todo esto, el número de verificaciones directas que podemos hacer nunca será mayor que una cantidad despreciable. De esto poco que podemos directamente alcanzar, debemos escoger lo mejor. Cada experimento nos debe permitir hacer un número máximo de predicciones que tengan el mayor grado posible de probabilidad. El problema es, por decirlo de alguna manera, incrementar la producción de la maquinaria científica. Permítanme comparar a la ciencia con una biblioteca que debe incrementarse indefinidamente; el bibliotecario tiene fondos limitados para sus compras y debe, por tanto, tensar cada nervio para no desperdiciarlos. La física experimental tiene que hacer las compras, y por sí sola puede enriquecer la biblioteca. En cuanto a la física matemática, su deber es redactar el catálogo. Si el catálogo está bien hecho, la biblioteca no será más rica por ello; pero el lector será capaz de utilizar su riqueza; y también, al mostrar al bibliotecario las lagunas de su colección, lo ayudará a hacer un uso más juicioso de sus fondos, que es lo más importante, en la medida en que aquellos fondos resultan completamente inadecuados. Tal es el papel de la física matemática. Debe dirigir la generalización para incrementar lo que ahora he llamado la producción de la ciencia. Por qué medios logra esto, y cómo puede hacerlo sin riesgo, es lo que ahora debemos examinar.

La unidad de la naturaleza. Antes que nada, observemos que cualquier generalización supone, en cierta medida, una creencia en la unidad y simplicidad de la naturaleza. En cuanto a la unidad concierne, no puede haber dificultad alguna. Si las diferentes partes del universo no fuesen como los órganos del mismo cuerpo, no reaccionarían unos con otros, se ignorarían mutuamente, y nosotros, en particular, solamente conoceríamos una parte. No necesitamos, por tanto, preguntar si la naturaleza es una, sino cómo es una.

En cuanto al segundo punto, no resulta tan evidente. No es cierto que la naturaleza sea simple. ¿Podemos, sin riesgo alguno, actuar como si lo fuera?

Hubo un tiempo en donde la simplicidad de la ley de Mariotte era un argumento a favor de su precisión: cuando Fresnel mismo, después de haber dicho en una conversación con Laplace que a la naturaleza no le importan las dificultades analíticas, se vio obligado a explicar sus palabras para no ofender la opinión actual. Hoy en día, las ideas han cambiado considerablemente; pero aquellos que no creen que las leyes naturales deban ser simples, comúnmente se ven obligados a actuar como si lo creyeran. No pueden prescindir completamente de esta necesidad sin hacer que toda generalización, y por tanto, que toda ciencia, sea imposible. Es claro que cualquier hecho puede ser generalizado en un número infinito de formas, y que es una cuestión de elección. Esta elección sólo puede ser guiada por cuestiones de simplicidad. Tomemos el caso más ordinario, a saber, el de la interpolación. Trazamos una línea continua, tan regular como sea posible, entre dos puntos dados por la observación. ¿Por qué evitamos puntos angulares e inflexiones agudas? ¿Por qué no hacemos que nuestra curva describa los zigzags más caprichosos que se nos puedan ocurrir? Es porque sabemos de antemano, o pensamos que sabemos, que la ley a expresar no puede ser tan complicada como todo eso. La masa de Júpiter puede ser deducida o de los movimientos de sus satélites, o de las perturbaciones de los planetas mayores, o de las de los planetas menores. Si tomamos la media de las determinaciones obtenidas por estos tres métodos, encontramos tres números muy juntos, pero no absolutamente idénticos. Este resultado puede ser interpretado al suponer que la constante gravitacional no es la misma en los tres casos; las observaciones ciertamente estarían mucho mejor representadas. ¿Por qué rechazamos esta interpretación? No porque sea absurda, sino porque es inútilmente complicada. Únicamente debemos aceptarla cuando nos veamos forzados a ello, y aún no está impuesta sobre nosotros. En resumen, en la mayoría de los casos, cada ley se lleva a cabo para ser simple hasta que se pruebe lo contrario.

Esta costumbre está impuesta sobre los físicos por las razones que he indicado, pero ¿cómo puede estar justificada ante la presencia de descubrimientos que, a diario, muestran nuevos detalles cada vez más ricos y complejos? ¿Cómo podemos incluso reconciliarla con la unidad de la naturaleza? Porque si todas las cosas son interdependientes, las relaciones en donde intervienen tantos objetos distintos ya no pueden ser simples.

Si estudiamos la historia de la ciencia, vemos que se producen dos fenómenos que son, por decirlo de alguna manera, cada uno lo inverso del otro. Algunas veces, es la simplicidad la que está oculta bajo la apariencia de algo complejo; a veces, por el contrario, es la simplicidad la que es aparente, y oculta realidades extremadamente complejas. ¿Qué hay más complicado que los movimientos perturbados de los planetas, y qué más simple que la ley de Newton? Ahí, como dijo Fresnel, la naturaleza, jugando con dificultades analíticas, sólo utiliza medios simples y crea, por su combinación, no sé qué tipo de madeja enredada. Aquí yace la simplicidad oculta que debe ser desenredada. Abundan ejemplos de lo contario. En la teoría cinética de gases, se estudian moléculas que alcanzan velocidades tremendas, y cuyos caminos, deformados por impactos incesantes, tienen las formas más caprichosas, y abren su camino a través del espacio en cada dirección. El resultado observable es la simple ley de Mariotte. Cada hecho individual se complicó. La ley de grandes números ha restablecido la simplicidad en el medio. Aquí, la simplicidad es sólo aparente, y la tosquedad de nuestros sentidos nos previene de ver la complejidad.

Muchos fenómenos obedecen a una ley de proporcionalidad. Pero, ¿por qué? Porque, en estos fenómenos, hay algo que es muy pequeño. La simple ley observada es únicamente la traducción de la regla analítica general por la cual el incremento infinitamente pequeño de una función es proporcional al incremento de la variable. Como en la realidad nuestros incrementos no son infinitamente pequeños, sino únicamente muy pequeños, la ley de proporcionalidad sólo es aproximada, y la simplicidad es sólo aparente. Lo que he dicho ahora aplica a la ley de superposición de movimientos pequeños, que resulta tan fructífera en sus aplicaciones y que es el fundamento de la óptica.

¿Y la ley de Newton por sí misma? Su simplicidad, tanto tiempo sin ser detectada, quizá sólo es aparente. Quién sabe si no se debe a algún mecanismo complicado, al impacto de alguna materia sutil animada por movimientos irregulares, y si no se ha vuelto simple meramente a través del uso de promedios y números grandes. En cualquier caso, es difícil no suponer que la verdadera ley contiene términos complementarios que pueden volverse sensibles en distancias pequeñas. Si en la astronomía son despreciables, y si así la ley recupera su simplicidad, es a causa de las enormes distancias de los cuerpos celestes. Sin duda, si nuestros medios de investigación se vuelven cada vez más penetrantes, descubriríamos lo simple bajo lo complejo, y luego lo complejo de lo simple, y después de nuevo lo simple bajo lo complejo, y así sucesivamente, sin ser incluso capaces de predecir cuál será el último término. Pero debemos detenernos en algún lado, y para que la ciencia sea posible, debemos detenernos donde hayamos encontrado la simplicidad. Ese es el único terreno sobre el cual podemos erigir el edificio de nuestras generalizaciones. Pero, siendo esta simplicidad únicamente aparente, ¿será el terreno lo suficientemente sólido? Eso es lo que ahora tenemos que descubrir.

Para este propósito, veamos qué parte desempeña, en nuestras generalizaciones, la creencia en la simplicidad. Hemos verificado una ley simple en un número considerable de casos particulares. Nos negamos a admitir que esta coincidencia, tantas veces repetida, sea resultado de la simple casualidad, y concluimos que la ley debe ser cierta en el caso general.

Kepler observa que las posiciones de un planeta observado por Tycho están todas sobre la misma elipse. Ni por un momento piensa que, por un fenómeno singular de la casualidad, Tycho nunca haya visto los cielos excepto en el momento mismo cuando el camino del planeta cortó tal elipse. ¿Qué importa entonces si la simplicidad es real o si esconde una verdad compleja? Ya sea que se deba a la influencia de números grandes que reducen diferencias individuales a un nivel, o a la grandeza o pequeñez de ciertas cantidades que permiten que ciertos términos sean abandonados, en ningún caso se debe a la casualidad. Esta simplicidad, real o aparente, siempre tiene una causa. Siempre debemos, por tanto, ser capaces de razonar de la misma manera, y si se ha observado una ley simple en varios casos particulares, podemos legítimamente suponer que también será verdadera en casos análogos. El rechazar admitir esto sería atribuir un papel inadmisible a la casualidad. Sin embargo, hay una diferencia. Si la simplicidad fuese real y profunda, soportaría el examen del incremento de precisión de nuestros métodos de medición. Si, entonces, creemos que la naturaleza es profundamente simple, debemos concluir que es una simplicidad aproximada y no rigurosa. Esto es lo que se ha hecho antes, pero es lo que nosotros ya no tenemos derecho a hacer. La simplicidad de las leyes de Kepler, por ejemplo, es únicamente aparente; pero eso no impide que sean aplicadas a casi cualesquiera sistemas análogos al sistema solar, aunque sí les impide ser rigurosamente exactas.

El papel de la hipótesis. Cada generalización es una hipótesis. La hipótesis desempeña, por tanto, un papel necesario, que nunca nadie ha impugnado. Pero siempre debe someterse, tan pronto como sea posible, a la verificación. No hace falta decir que, si no soporta este examen, debe ser inmediatamente abandonada. Esto es, en realidad, lo que generalmente se hace, pero a veces con una cierta impaciencia. Pues bien, esta impaciencia no está justificada. El físico que acaba de renunciar a una de sus hipótesis debe, por el contario, alegrarse, porque encontró una oportunidad inesperada de descubrimiento. Su hipótesis, imagino, no ha sido adoptada a la ligera. Tomó en cuenta todos los factores conocidos que parecen capaces de intervenir en el fenómeno. Si no se verifica, es porque hay algo inesperado y extraordinario en él, porque estamos en el punto de encontrar algo desconocido y nuevo. ¿Ha resultado estéril la hipótesis así rechazada? Lejos de eso. Incluso podría decirse que ha prestado más servicio que una hipótesis verdadera. No únicamente ha sido la ocasión para un experimento decisivo, sino que, si este experimento hubiera sido hecho de manera casual, sin hipótesis alguna, no hubiera podido hacerse ninguna conclusión; no se hubiera visto nada extraordinario; y sólo hubiera sido catalogado un hecho más, sin deducir de él incluso la consecuencia más remota.

Ahora bien, ¿bajo qué condiciones no resulta riesgoso el uso de la hipótesis? La propuesta de someter todo al experimento no es suficiente. Algunas hipótesis son peligrosas (primero y principalmente aquellas que son tácitas e inconscientes). Y como las hacemos sin conocerlas, no nos podemos librar de ellas. Aquí, de nuevo, hay un servicio que nos puede prestar la física matemática. Por la precisión que la caracteriza, estamos obligados a formular todas las hipótesis que, sin su auxilio, haríamos de manera dubitativa. Notemos también que es importante no multiplicar hipótesis de manera indefinida. Si construimos una teoría basada en múltiples hipótesis, y el experimento las condena, ¿cuáles de las premisas deben cambiarse? Es imposible decir. A la inversa, si el experimento es exitoso, ¿debemos suponer que ha verificado todas estas hipótesis de una vez por todas? ¿Pueden varias incógnitas ser determinadas por una simple ecuación?

También debemos tener cuidado al distinguir entre los distintos tipos de hipótesis. Antes que nada, están aquellas que son absolutamente naturales y necesarias. Es difícil no suponer que la influencia de cuerpos muy distantes es despreciable, que los pequeños movimientos obedecen a la ley lineal, y que el efecto es una función continua de su causa. Diría tanto sobre las condiciones impuestas por la simetría. Todas estas hipótesis afirman, por decirlo de alguna manera, la base común de todas las teorías de la física matemática, y son las últimas que deben ser abandonadas. Existe una segunda categoría de hipótesis que calificaré como indiferente. En la mayoría de las cuestiones, el analista asume, al principio de sus cálculos, si la materia es continua o si, a la inversa, está formada por átomos. En cualquier caso, sus resultados habrán sido los mismos. En la suposición atómica, simplemente hubiera sido un poco más difícil obtenerlos, pero eso es todo. Si después el experimento confirma sus conclusiones, ¿supondrá que ha probado, por ejemplo, la existencia real de los átomos?

En las teorías ópticas, se introducen dos vectores, uno de los cuales consideramos como una velocidad, y el otro como un vórtice. Esto, de nuevo, es una hipótesis indiferente, porque habríamos llegado a las mismas conclusiones al asumir al primero como vórtice y al último como una velocidad. El éxito del experimento no puede probar, por consiguiente, que el primer vector sea realmente una velocidad. Solamente prueba una cosa, a saber, que es un vector, y esa es la única hipótesis que realmente ha sido introducida en las premisas. Para darle la apariencia concreta que la falibilidad de nuestra mente demanda, fue necesario considerarla, o como una velocidad, o como un vórtice. De la misma forma, fue necesario representarla por una x o por una y, pero el resultado no probará que estábamos en lo cierto o equivocados al considerarla como una velocidad; ni probará que estábamos en lo cierto o equivocados al llamarla x y no y.

Estas hipótesis indiferentes nunca resultan riesgosas siempre que sus caracteres no sean malentendidos. Pueden ser útiles incluso como artificios para nuestros cálculos, o para asistir nuestro entendimiento a partir de imágenes concretas, para fijar, pues, las ideas, como se suele decir. No necesitan, por tanto, ser rechazadas. Las hipótesis de la tercera categoría son verdaderas generalizaciones, y deben ser confirmadas o invalidadas por el experimento. Ya sea que sean verificadas o condenadas, siempre serán fructíferas, pero, por las razones que he dado, únicamente serán así si no son muy numerosas.

Origen de la física matemática. Vayamos más lejos y estudiemos más cerca las condiciones que han asistido el desarrollo de la física matemática. Reconocemos, en principio, que los esfuerzos de los hombres de ciencia siempre han tendido a resolver el complejo fenómeno dado directamente por el experimento en un gran número de fenómenos elementales, y esto en tres formas distintas.

Primero, con respecto al tiempo. En lugar de abarcar, en su totalidad, el progresivo desarrollo de un fenómeno, simplemente tratamos de conectar cada momento con el que inmediatamente precede. Admitimos que el estado presente del mundo únicamente depende del pasado inmediato, sin estar directamente influido, por decirlo de alguna manera, por la recolección de un pasado más distante. Gracias a este postulado, en lugar de estudiar directamente toda la sucesión de los fenómenos, nos podemos limitar a registrar su *ecuación diferencial*; por las leyes de Kepler, sustituimos la ley de Newton.

Después, intentamos descomponer el fenómeno en el espacio. Lo que el experimento nos da es un confuso agregado de hechos difundidos sobre un escenario de extensión considerable. Debemos tratar de deducir el fenómeno elemental, que todavía estará localizado en una región muy pequeña de espacio.

Unos pocos ejemplos quizá clarifiquen lo que intento decir. Si quisiéramos estudiar, en toda su complejidad, la distribución de la temperatura en un sólido frío, no podríamos hacerlo. Y esto simplemente porque, si pensamos que un punto en el sólido puede directamente impartir algo de su calor a un punto vecino, inmediatamente impartirá ese calor sólo a los puntos más cercanos, y no es sino gradualmente que el flujo de calor alcanzará otras porciones del sólido. El fenómeno elemental es el intercambio de calor entre dos puntos contiguos. Está estrictamente localizado y es relativamente simple si, como es natural, admitimos que no está influido por la temperatura de las moléculas, cuya distancia que separa unas de otras es pequeña.

Si doblo una barra, adquiere una forma muy complicada, cuya investigación directa sería imposible. Pero puedo tratar de resolver el problema si me doy cuenta que su flexura es solamente el resultante de las deformaciones de los mismos elementos pequeños de la barra, y que la deformación de cada uno de estos elementos únicamente depende de las fuerzas que directamente se aplican sobre ellos, y no, en lo más mínimo, de las fuerzas que puedan estar actuando sobre otros elementos.

En todos estos ejemplos, que pueden incrementarse si dificultad, se admite que no hay acción a distancia o a distancias muy grandes. Esa es una hipótesis, y no es siempre cierta, como lo prueba la ley de gravitación. Debe ser, por tanto, verificada. Si es confirmada, incluso de una manera aproximada, sería valuable, porque nos ayudaría a utilizar la física matemática, en cualquier caso, a partir de aproximaciones sucesivas. Si no pasa la prueba, debemos buscar algo más que sea análogo, porque existen otros medios para llegar al fenómeno elemental. Si varios cuerpos actúan simultáneamente, puede suceder que sus acciones sean independientes, y puedan ser añadidas una a la otra, ya sea como vectores o como cantidades escalares. El fenómeno elemental es, entonces, la acción de un cuerpo aislado. O supongamos, de nuevo, que se trata de una cuestión de movimientos pequeños, o, más en general, de variaciones pequeñas que obedecen la bien conocida ley de independencia mutua o relativa. El movimiento observado estará entonces descompuesto en movimientos simples, por ejemplo, el sonido en sus armónicas, y la luz blanca en sus componentes monocromáticos. Cuando hemos descubierto en qué dirección buscar el fenómeno elemental, ¿por qué medios podemos alcanzarlo? Primero, a menudo puede suceder que, para predecirlo, o, mejor dicho, para predecir qué nos resulta útil, no será necesario conocer su mecanismo. La ley de números grandes será suficiente. Tomemos como ejemplo la propagación del calor. Cada molécula irradia hacia su molécula vecina; no necesitamos averiguar de acuerdo con qué ley, y si hacemos cualquier suposición a este respecto, será una hipótesis indiferente, y, por tanto, inútil y no sujeta a verificación. De hecho, por la acción de promedios y gracias a la simetría del medio, todas las diferencias están niveladas, y, cualquiera sea la hipótesis, el resultado es siempre el mismo.

El mismo rasgo se presenta en la teoría de la elasticidad, y en la de la capilaridad. Las moléculas colindantes se atraen y repelen unas a otras, no necesitamos investigar a partir de qué ley. Es suficiente para nosotros que esta atracción sea sensible sólo en distancias pequeñas, que las moléculas sean muy numerosas, que el medio sea simétrico, y solamente tenemos que dejar que la ley de números grandes desempeñe su labor.

Aquí de nuevo la simplicidad del fenómeno elemental se esconde bajo la complejidad del fenómeno observable resultante; pero, a su vez, esta simplicidad era sólo aparente y disfrazaba un mecanismo muy complejo. Evidentemente, el mejor medio para alcanzar el fenómeno elemental sería el experimento. Sería necesario, a partir de artificios experimentales, desasociar el complejo sistema que la naturaleza ofrece a nuestras investigaciones, y estudiar cuidadosamente los elementos de una forma tan desasociada como sea posible. Por ejemplo, la luz blanca natural sería descompuesta en luces monocromáticas por la ayuda del prisma, y en luces polarizadas por la ayuda del polarizador. Desafortunadamente, eso no es siempre posible ni siempre suficiente, y a veces la mente debe correr delante del experimento. Daré un ejemplo más que siempre me ha golpeado enérgicamente. Si descompongo luz blanca, debo ser capaz de aislar una porción del espectro, pero, no importa qué tan pequeño sea éste, siempre será de una cierta anchura. De la misma manera, las luces naturales llamadas *monocromáticas* nos dan un rayo muy fino, pero un rayo que no es, sin embargo, infinitamente fino. Se podría suponer que, en el estudio experimental de las propiedades de estas luces naturales, al operar con rayos cada vez más finos, y al pasar por fin al límite, por decirlo de alguna manera, eventualmente obtendríamos las propiedades de una luz rigurosamente monocromática. Esa suposición no sería correcta. Asumo que dos rayos emanan de la misma fuente, que primero están polarizados en planos con ángulos rectos, que después son traídos de vuelta al mismo plano de polarización, y que intentamos obtener interferencia. Si la luz fuese rigurosamente *monocromática*, habría interferencia; pero con nuestras luces casi monocromáticas, no habrá tal, y esto sin importar qué tan estrecha pueda ser la luz. Para que sea de otra forma, el rayo tendría que ser varios millones de veces más fina que los rayos más finos conocidos.

Aquí entonces iremos por mal camino al proceder al límite. La mente tiene que correr delante del experimento, y si lo ha hecho así con éxito, es porque se ha permitido ser guiada por el instinto de simplicidad. El conocimiento del hecho elemental nos permite plantear el problema en la forma de una ecuación. Sólo queda deducir de ella, por combinación, el hecho complejo observable y verificable. Esto es lo que llamamos una *integración*, y es la provincia del matemático. Podría preguntarse, ¿por qué en la ciencia física la generalización toma tan fácilmente la forma matemática? La razón es ahora fácil de ver. No es solamente porque debemos expresar leyes numéricas, sino también porque el fenómeno observable se debe a la superposición de un gran número de fenómenos elementales que son *todos similares unos con otros*; y, de esta forma, las ecuaciones diferenciales son introducidas naturalmente. No es suficiente que cada fenómeno elemental deba obedecer leyes simples: todos aquellos que tenemos que combinar deben obedecer la misma ley; únicamente de esta forma resulta útil la intervención de las matemáticas. Las matemáticas nos enseñan, en realidad, a combinar cómo con cómo. Su objeto es adivinar el resultado de una combinación sin tener que reconstruir tal combinación elemento por elemento. Si tenemos que repetir la misma operación varias veces, las matemáticas nos permiten evitar esta repetición al decirnos el resultado de antemano por una especie de inducción. Esto ya lo he explicado en el capítulo sobre el razonamiento matemático. Pero para tal propósito, todas estas operaciones deben ser similares; en el caso contrario, debemos hacer que nuestra mente trabaje sobre ellas en su totalidad, una después de otra, y las matemáticas nos serían inútiles. Es, por tanto, gracias a la homogeneidad aproximada de la materia estudiada por los físicos, que la física matemática vino a la existencia. En las ciencias naturales, las siguientes condiciones ya no se encuentran: homogeneidad, independencia relativa de partes remotas, simplicidad del hecho elemental. Es por esto que el estudiante de ciencia natural se ve obligado a recurrir a otros modos de generalización.

CAPÍTULO X

LAS TEORÍAS DE LA FÍSICA MODERNA

Importancia de las teorías físicas. La naturaleza efímera de las teorías científicas toma por sorpresa al hombre mundano. Cuando termina su breve periodo de prosperidad, este hombre ve que las teorías son, una por una, abandonadas; solamente ve ruinas apiladas sobre ruinas; predice que las teorías de hoy en día en poco tiempo también sucumbirán, y concluye que son absolutamente vanas. Esto es lo que llama la *ruina de la ciencia*.

Pero su escepticismo es superficial, porque no toma en cuenta el objeto de las teorías científicas y el papel que desempeñan, o entendería que las ruinas pueden ser buenas para algo más. Ninguna teoría parecía estar establecida sobre terreno más firme que la de Fresnel, que atribuía luz a los movimientos del éter. Entonces, si hoy es preferible la teoría de Maxwell, ¿significa que el trabajo de Fresnel fue en vano? No; porque el objetivo de Fresnel no era saber si realmente hay un éter, si está o no constituido por átomos, o si estos átomos se mueven de tal o cual forma; su objetivo era predecir fenómenos ópticos.

Esta teoría de Fresnel nos permite hacer cosas hoy, así como nos lo permitió antes de la llegada de Maxwell. Las ecuaciones diferenciales son siempre verdaderas, siempre pueden ser integradas por los mismos métodos, y los resultados de esta integración aún preservan su valor. No puede decirse que esto equivale a reducir teorías físicas a simples recetas prácticas; estas ecuaciones expresan relaciones, y si aquellas siguen siendo ciertas, se debe a que las relaciones preservan su realidad. Nos enseñan ahora, como hicieron entonces, que existe tal y cual relación entre esta cosa y aquella, siendo la única diferencia que el algo que entonces llamábamos *movimiento*, lo llamamos ahora *corriente eléctrica*. Pero estos son simples nombres de las imágenes que sustituimos por los objetos reales que la naturaleza siempre ocultará a nuestros ojos. Las verdaderas relaciones entre estos objetos reales son la única realidad que podemos alcanzar, y la condición es que existan las mismas relaciones entre estos objetos como entre las imágenes que nos vemos forzados a poner en su lugar. Si las relaciones son conocidas para nosotros, ¿qué importa si pensamos conveniente remplazar una imagen por otra?

Que un fenómeno periódico dado (una oscilación eléctrica, por ejemplo) se deba realmente a la vibración de un átomo dado el cual, comportándose como un péndulo, sea realmente desplazado de esta o aquella manera, no es no cierto ni esencial. Pero sí podemos afirmar que si hay una íntima relación entre la oscilación eléctrica, el movimiento del péndulo, y todos los fenómenos periódicos que corresponda a una realidad profunda; que esta relación, esta similitud, o, mejor dicho, este paralelismo, sea continuado en los detalles, y que esto sea una consecuencia de principios más generales tales como el de la conservación de la energía, y el de acción mínima, entonces esta es la verdad que siempre se mantendrá igual sin importar el traje que le ajustemos para vestirla.

Muchas teorías sobre la dispersión han sido propuestas. Las primeras fueron imperfectas, y contenían poco más que la verdad. Después vino la de Helmholtz y ésta, a su vez, fue modificada de distintas formas; su mismo autor concibió otra teoría, fundada en los principios de Maxwell. Pero lo notable es que todos los científicos que siguieron a Helmholtz obtuvieron los mismos resultados, aunque sus puntos de partida estuviesen, según todas las apariencias, ampliamente separados. Me aventuro a decir que estas teorías son todas simultáneamente verdaderas, y no simplemente porque expresen una relación cierta (aquella entre la absorción y la dispersión anormal). En las premisas de estas teorías, la parte cierta es la parte común a todas: es la afirmación de esta o aquella relación entre ciertas cosas, que algunos llaman por un nombre y otros por otro.

La teoría cinética de los gases ha dado lugar a muchas objeciones, a las que sería difícil dar una respuesta donde se clame que la teoría es absolutamente cierta. Pero todas estas objeciones no alteran el hecho de que esta teoría ha sido útil, particularmente al revelarnos una relación verdadera que, de otra forma, hubiese permanecido profundamente oculta (la relación entre presiones gaseosas y osmóticas). En este sentido, puede entonces decirse que es verdadera.

Cuando un físico encuentra una contradicción entre dos teorías que le son igualmente estimadas, algunas veces dice: “No nos preocupemos, sino aferrémonos a los dos extremos de la cadena, para que no perdamos los eslabones intermedios”. Este argumento, propio de un teólogo avergonzado, sería ridículo si atribuyéramos a las teorías físicas la interpretación dada por el hombre mundano. En caso de contradicción, una de ellas (por lo menos) debería considerarse como falsa. Pero este ya no es el caso si únicamente buscamos en ellas lo que debe ser buscado. Es muy posible que ambas expresen relaciones verdaderas, y que las contradicciones sólo existan en las imágenes que nos hemos formado de la realidad. Para aquellos que sienten que estamos yendo muy lejos en nuestras limitaciones del dominio accesible al científico, les respondo esto: estas cuestiones que prohibimos que investigues, y de las cuales te lamentas tanto, no son sólo insolubles, sino que son también ilusorias y carentes de significado.

Este filósofo clama que toda la física puede ser explicada por el impacto mutuo de átomos. Si únicamente se refiere a que se obtienen las mismas relaciones entre los fenómenos físicos como entre el impacto mutuo de un gran número de bolas de billar, pues entonces bien hecho, esto es verificable, y quizá hasta cierto. Pero él quiere decir algo más, y pensamos que lo entendemos, porque pensamos que sabemos qué es un impacto. ¿Por qué? Simplemente porque muchas veces hemos visto un juego de billar. ¿Hemos de entender que Dios experimenta las mismas sensaciones en la contemplación de Su trabajo que las que nosotros tenemos al ver un juego de billar? Si no es nuestra intención dar a esta aserción este significado fantástico, y si no queremos darle el significado más restringido que he mencionado antes, que es el significado del sonido, entonces no tiene significado en absoluto. Hipótesis de este tipo tienen, por tanto, únicamente un sentido metafórico. El científico no debe desterrarla más que cuando un poeta destierra la metáfora, pero debe saber lo que valen. Pueden ser útiles para dar satisfacción a la mente, y no serán dañinas mientras sólo sean hipótesis indiferentes.

Estas consideraciones explican por qué ciertas teorías, que se pensaban abandonadas y definitivamente condenadas por el experimento, de pronto reviven de sus cenizas y comienzan una nueva vida. Es porque expresan relaciones ciertas, y no han dejado de hacerlo cuando - por alguna razón u otra - nos sentimos en la necesidad de enunciar las mismas relaciones en otro lenguaje. Su vida había estado latente, por así decirlo.

Apenas hace quince años, ¿había algo más ridículo, más pintorescamente antiguo, que los fluidos de Coulomb? Y aún así, aquí están reapareciendo bajo el nombre de *electrones*. ¿En qué difieren estas moléculas permanentemente electrificadas de las moléculas eléctricas de Coulomb? Es cierto que, en los electrones, la electricidad está apoyada por una materia muy, pero muy pequeña; en otras palabras, tienen masa. Con todo, Coulomb no negó masa a sus fluidos, y si lo hizo, fue con renuencia. Sería imprudente afirmar que la creencia en los electrones no experimentará también un eclipse, pero fue, no obstante, curioso notar este inesperado renacimiento.

Pero el ejemplo más llamativo es el principio de Carnot. Carnot lo estableció a partir de hipótesis falsas. Cuando se encontró que el calor era indestructible, y que puede ser convertido en trabajo, sus ideas fueron completamente abandonadas. Después, Clausius regresó a ellas, y a él se debe su triunfo definitivo. En su forma primitiva, la teoría de Carnot expresaba, en adición a relaciones ciertas, otras relaciones inexactas, los *escombros* de ideas viejas; pero la presencia de las últimas no alteró la realidad de las otras. Clausius únicamente tuvo que separarlas, así como uno rompe ramas muertas.

El resultado fue la segunda ley fundamental de la termodinámica. Las relaciones fueron siempre las mismas, aunque no se mantenían - por lo menos en apariencia - entre los mismos objetos. Esto fue suficiente para que el principio conservara su valor. Tampoco han perecido los razonamientos de Carnot por este motivo: fueron aplicados a una concepción imperfecta de la materia, pero su forma - es decir, la parte esencial de ellos - continuó siendo correcta. Lo que he dicho ahora arroja alguna luz, al mismo tiempo, sobre el papel de los principios generales, tales como el principio de acción mínima o de la conservación de la energía. Estos principios son de un gran valor. Fueron obtenidos en la búsqueda por lo que era común en la enunciación de numerosas leyes físicas; representan, así, la quintaesencia de innumerables observaciones. Sin embargo, de su misma generalidad resulta una consecuencia sobre la que he llamado la atención en el Capítulo VIII, a saber, que ya no son capaces de verificación. Como no podemos dar una definición general de la energía, el principio de la conservación de ésta simplemente significa que hay *algo* que se mantiene constante. Cualesquiera nuevas nociones sobre el mundo puedan darnos futuros experimentos, estamos seguros, de antemano, que hay algo que se mantiene constante, y que puede ser llamado *energía*. ¿Significa esto que el principio carece de significado y que se desvanece en una tautología? Para nada. Significa que las diferentes cosas a las que damos el nombre de energía están conectadas por una relación verdadera; afirma, entre ellas, una relación real. Pero entonces, si este principio tiene un significado, éste puede ser falso; podría ser que no tengamos derecho alguno a extender indefinidamente sus aplicaciones, y sin embargo es cierto, de antemano, a ser verificado en el sentido estricto de la palabra. ¿Cómo podemos saber, entonces, que ha sido extendido más allá de la medida de lo legítimo? Simplemente cuando deje de sernos útil, es decir, cuando ya no podamos utilizarlo para predecir correctamente nuevos fenómenos. Debemos estar seguros, en tal caso, que la relación afirmada ya no es real porque, de otra forma, sería fructífera. El experimento, sin contradecir directamente una nueva extensión del principio, lo habrá, no obstante, condenado.

Física y mecánica. La mayoría de los teóricos tienen una constante predilección por las explicaciones tomadas o prestadas de la física, la mecánica, o la dinámica. Algunos estarían satisfechos si pudieran explicar todos los fenómenos a partir del movimiento de las moléculas atrayéndose unas a otras de acuerdo con ciertas leyes. Otros son más exactos, y suprimirían las atracciones actuando a cierta distancia; sus moléculas seguirían caminos rectilíneos, de los cuales únicamente se desviarían por impactos. Otros, como Hertz, también suprimen las fuerzas, pero suponen a sus moléculas sujetas a conexiones geométricas análogas, por ejemplo, a aquellas de los sistemas articulados. De esta forma, desean reducir la dinámica a una especie de cinemática. En una palabra, todos desean encorvar la naturaleza en una cierta forma, y a menos que puedan hacer esto, no pueden estar satisfechos. ¿Es la naturaleza lo suficientemente flexible para esto?

Examinaremos esta cuestión en el Capítulo XII, a propósito de la teoría de Maxwell. Cada vez que los principios de acción mínima y de la energía están satisfechos, debemos observar que no sólo siempre hay una posible explicación mecánica, sino también que hay un número ilimitado de tales explicaciones. Por medio de un conocido teorema de König, puede ser demostrado que podemos explicar todo en un número ilimitado de formas, ya sea por conexiones a la manera de Hertz, o, de nuevo, por fuerzas centrales. Sin duda podría ser igualmente fácil demostrar que todo puede ser demostrado a partir de impactos simples. Para esto, tengamos en cuenta que no es suficiente contentarse con la materia ordinaria de la cual estamos conscientes por medio de nuestros sentidos, y cuyo movimiento observamos directamente. Podemos concebir la materia ordinaria ya sea compuesta de átomos, cuyos movimientos internos se nos escapan, y nuestros sentidos son capaces de estimar únicamente los desplazamientos del todo; o podemos imaginar uno de esos sutiles fluidos que, bajo el nombre de *éter* o de otros nombres, han desempeñado desde siempre un papel muy importante en las teorías físicas. A menudo vamos más allá, y consideramos al éter como lo único primitivo, o incluso como la única materia verdadera. Los más moderados consideran la materia ordinaria como éter condensado, y no hay nada asombroso en esta concepción; pero otros sólo reducen su importancia aún más, y ven en la materia no más que el lugar geométrico de las singularidades en el éter. Lord

Kelvin, por ejemplo, sostiene que lo que llamamos materia es únicamente el lugar de aquellos puntos en donde el éter es animado por movimientos de vórtices. Riemann cree que es el lugar de aquellos puntos en donde el éter es constantemente destruido; para Wiechert o Larmor, es el lugar de los puntos en donde el éter ha sufrido una especie de torsión de un tipo muy particular. Tomando cualquiera de estos puntos de vista, me pregunto con qué derecho aplicamos al éter las propiedades mecánicas observadas en la materia ordinaria, que no es sino materia falsa. Los fluidos antiguos, calóricos, eléctricos, etc., fueron abandonados cuando se observó que el calor no es indestructible. Pero también fueron puestos de lado por otra razón. Al materializarlos, su individualidad fue, por decirlo de alguna manera, enfatizada; se abrieron brechas entre ellos, y estas brechas tuvieron que ser rellenadas cuando el sentimiento de unidad en la naturaleza se fortaleció, y cuando se percibieron las relaciones íntimas que conectan todas las partes. Al multiplicar los fluidos, los antiguos físicos no únicamente crearon entidades innecesarias, sino que destruyeron lazos reales. No resulta suficiente para una teoría que no afirme relaciones falsas; tampoco debe ocultar relaciones verdaderas.

¿Existe realmente nuestro éter? Conocemos el origen sobre nuestra creencia en él. Si la luz toma varios años en alcanzarnos desde una estrella distante, ya no se encuentra en la estrella, ni está en la Tierra. Debe estar en algún lado, y sostenida, por decirlo de alguna manera, por algún agente material.

La misma idea puede ser expresada en una forma más matemática y abstracta. Lo que notamos son los cambios experimentados por las moléculas materiales. Observamos, por ejemplo, que la placa fotográfica experimenta las consecuencias de un fenómeno cuya escena varios años antes fue la masa incandescente de una estrella. Ahora bien, en la mecánica ordinaria, el estado del sistema bajo consideración depende únicamente de su estado en el momento inmediatamente precedente; el sistema, por tanto, satisface ciertas ecuaciones diferenciales. Por otra parte, si no creyésemos en el éter, el estado del universo material dependería no sólo del estado inmediatamente precedente, sino también de estados mucho más viejos; el sistema satisfaría ecuaciones de diferencias finitas. El éter fue inventado para escapar de esta ruptura de las leyes de la mecánica general.

A pesar de todo, esto sólo nos obligaría a llenar el espacio interplanetario con éter, pero no a hacerlo penetrar en medio de los medios materiales. El experimento de Fizeau va más allá. Por la interferencia de rayos que han pasado a través de aire o agua en movimiento, parece mostrarnos dos medios distintos penetrándose uno a otro, y, aún así, siendo desplazados uno con respecto al otro. El éter es todo excepto algo a nuestro alcance. Pueden concebirse experimentos en donde nos acerquemos todavía más a él. Asumamos que el principio de Newton acerca de la igualdad de acción y reacción no es cierto si es aplicado a la materia *sola*, y que esto puede probarse. La suma geométrica de todas las fuerzas aplicadas a todas las moléculas dejaría de ser cero. Si no quisiéramos cambiar toda la ciencia de la mecánica, tendríamos que introducir el éter, para que la acción que la materia aparentemente sufre sea contrarrestada por la reacción de la materia sobre algo.

O, de nuevo, supongamos que descubrimos que los fenómenos ópticos y eléctricos están influidos por el movimiento de la Tierra. Se seguiría de esto que tales fenómenos pueden revelarnos no sólo el movimiento relativo de los cuerpos materiales, sino también lo que parecería ser el movimiento absoluto. De nuevo, sería necesario el éter para que estos así llamados movimientos absolutos no sean sus desplazamientos con respecto al espacio vacío, sino con respecto a algo concreto.

¿Se conseguirá esto algún día? No lo pienso así, y explicaré por qué; aún así, no es absurdo pensarlo, porque otros han sostenido este punto de vista. Por ejemplo, si la teoría de Lorentz - de la que hablaré con más detalle en el Capítulo XIII - fuese cierta, el principio de Newton no se aplicaría a la materia *sola*, y la diferencia no estaría muy lejos del alcance del experimento. Por otra parte, se han hecho muchos experimentos sobre la influencia del movimiento de la Tierra, y los resultados siempre han sido negativos. Pero si se han llevado a cabo estos experimentos, es porque no hemos estado seguros de antemano; y, en realidad, de acuerdo con teorías actuales, la compensación únicamente sería aproximada, y podríamos esperar encontrar métodos más precisos que den resultados positivos. Pienso que tal esperanza es ilusoria, pero fue interesante, no obstante, mostrar que un éxito de este tipo nos abriría, en un cierto sentido, a un mundo nuevo.

Y ahora permítanme hacer una digresión; debo explicar por qué no creo, a pesar de Lorentz, que observaciones más exactas harán evidente algo más que los desplazamientos relativos de los cuerpos materiales. Se han realizado experimentos supuestos a revelar los términos del primer orden; los resultados fueron inoperantes. ¿Pudo haber sido esto pura casualidad? Nadie ha admitido tal cosa; se buscó una explicación general, y Lorentz la encontró. Demostró que los términos del primer orden deben cancelarse unos con otros, pero no así los términos del segundo orden. Después, se realizaron experimentos más exactos, que también resultaron negativos; tampoco pudo esto ser resultado de la casualidad. Era necesaria una explicación, y tal fue recibida, como siempre lo son: las hipótesis son lo que menos nos falta. Pero esto no es suficiente. ¿Hay alguien que no piense que todo esto otorga a la casualidad un papel demasiado importante? ¿No sería también una casualidad que esta concurrencia singular cause una cierta circunstancia para destruir los términos del primer orden, y que una circunstancia totalmente diferente pero muy oportuna cause que aquellos términos del segundo orden desaparezcan? No; se debe encontrar la misma explicación para ambos casos, y todo tiende a demostrar que esta explicación serviría igualmente bien para los términos de un orden mayor, y que la destrucción mutua de estos términos será rigurosa y absoluta.

El estado actual de la física. Pueden distinguirse dos tendencias opuestas en la historia del desarrollo de la física. Por una parte, continuamente se descubren nuevas relaciones entre objetos que parecían destinados a permanecer desconectados por siempre; hechos dispersos dejan de ser extraños unos a otros y tienden a encauzarse en una imponente síntesis. La marca de la ciencia es hacia la unidad y la simplicidad.

Por otra parte, continuamente son revelados nuevos fenómenos; pasará mucho tiempo para que su lugar pueda ser asignado (algunas veces podrá suceder que, para encontrarles un lugar, una esquina del edificio deba ser demolida). De la misma forma, continuamente percibimos detalles cada vez más variados en los fenómenos que conocemos, y en donde nuestros crudos sentidos solían ser incapaces de detectar cualquier falta de unidad. Lo que pensábamos como simple se vuelve complejo, y la marcha de la ciencia parece ir hacia la diversidad y la complicación.

Aquí, pues, se encuentran dos tendencias opuestas, cada una de las cuales, a su vez, parece triunfar sobre la otra. ¿Cuál vencerá? Si la primera tendencia vence, la ciencia es posible; pero nada prueba esto *a priori*, y podría suceder que, después de esfuerzos infructuosos para someter a la naturaleza a nuestro ideal de unidad a pesar de sí misma, nos veamos sumergidos en la siempre creciente inundación de nuestra nueva riqueza, y obligados a renunciar a toda idea de clasificación (a abandonar, pues, nuestro ideal, y a reducir la ciencia al simple registro de innumerables recetas).

En realidad, no podemos dar respuesta alguna a esta cuestión. Todo lo que podemos hacer es observar la ciencia tal como es hoy en día, y compararla con la de ayer. Sin duda, después de este examen, estaremos en posición de ofrecer unas pocas conjeturas.

Hace medio siglo las esperanzas, en efecto, eran altas. La unidad de la fuerza acababa de sernos revelada por el descubrimiento de la conservación de la energía y de su transformación. Este descubrimiento también mostró que los fenómenos del calor podían ser explicados a partir de movimientos moleculares. Aunque la naturaleza de estos movimientos no era conocida de forma exacta, nadie dudaba que sería determinada en poco tiempo. En cuanto a la luz, el trabajo parecía estar terminado. En cuanto a la electricidad concierne, no había un avance tan grande. La electricidad acababa de anexar al magnetismo, y esto constituía un paso considerable y definitivo hacia la unidad. ¿Pero cómo iba a ser llevada la electricidad, a su vez, a la unidad general, y cómo iba a ser incluida en el mecanismo universal general? Nadie tenía la más mínima idea. En cuanto a la posibilidad de la inclusión, todos estaban de acuerdo: tenían fe en ella. Finalmente, en cuanto a las propiedades moleculares de los cuerpos materiales concierne, la inclusión parecía ser más fácil, pero los detalles eran muy confusos. En pocas palabras, las esperanzas eran vastas y fuertes, pero vagas.

Hoy en día, ¿qué es lo que vemos? En primer lugar, un paso hacia delante, un progreso inmenso. Las relaciones entre la luz y la electricidad son ahora conocidas; los tres dominios de la luz, la electricidad, y el magnetismo, formalmente separados, son ahora uno, y esta anexión parece ser definitiva.

No obstante, la conquista nos ha causado algunos sacrificios. Los fenómenos ópticos se volvieron casos particulares de los fenómenos eléctricos. Mientras que los primeros permanecieron aislados, era fácil explicarlos a partir de los movimientos que pensábamos conocer con todo detalle. Eso era bastante fácil, pero ahora cualquier explicación que pretenda ser aceptada debe cubrir todo el dominio de la electricidad. Y esto no puede hacerse sin dificultad alguna.

La teoría más satisfactoria es la de Lorentz; es, incuestionablemente, la teoría que mejor explica los hechos conocidos, la que pone de relieve el mayor número de relaciones conocidas, y la teoría en donde encontramos la mayoría de los rastros de una construcción definitiva. He mostrado arriba que, aún así, todavía posee una falta grave. Está en contradicción con la ley de Newton que establece que la acción y reacción son iguales y opuestas. O, más bien, este principio, de acuerdo con Lorentz, no puede ser aplicable a la materia sola; si es cierto, debe entonces considerar la acción del éter sobre la materia, y la reacción de la materia sobre el éter. Ahora bien, en el nuevo orden, es muy probable que las cosas no sucedan de esta manera.

Sea como fuere, debemos a Lorentz que los resultados de Fizeau sobre la óptica de cuerpos en movimiento, las leyes de dispersión normal y anormal, y la de la absorción, estén conectadas entre sí y con las otras propiedades del éter, por ligaduras que, sin duda, no serán fácilmente separadas. Véase con qué facilidad encontró su lugar el nuevo fenómeno anunciado por Zeeman, y que incluso ayudó a la clasificación de la rotación magnética de Faraday, que había desafiado todos los esfuerzos de Maxwell. Esta facilidad prueba que la teoría de Lorentz no es una mera combinación artificial que eventualmente encontrará su solvente. Probablemente tenga que ser modificada, pero no destruida.

El único objetivo de Lorentz era incluir, en un todo único, toda la óptica y la electrodinámica de los cuerpos en movimiento; nunca pretendió dar una explicación mecánica. Larmor va más allá. Manteniendo la parte esencial de la teoría de Lorentz, injerta sobre ella, por decirlo de alguna manera, las ideas de MacCullagh sobre la dirección del movimiento del éter. MacCullagh sostuvo que la velocidad del éter es la misma, en magnitud y dirección, que la fuerza magnética. Ingenioso como es este intento, continúa presente la falta en la teoría de Lorentz, e incluso se agrava. De acuerdo con Lorentz, no sabemos qué son los movimientos del éter, y debido a que no sabemos esto, podemos suponerlos como movimientos compensando aquellos de la materia, y reafirmando que la acción y reacción son iguales y opuestas. De acuerdo con Larmor, conocemos los movimientos del éter, y podemos probar que tal compensación no tiene lugar.

Si Larmor ha fallado en su intento, como en mi opinión lo ha hecho, ¿se sigue necesariamente de esto que una explicación mecánica sea imposible? Lejos de eso. Dije arriba que, siempre que un fenómeno obedezca los dos principios de energía y acción mínima, permite un número ilimitado de explicaciones mecánicas. Y lo mismo con los fenómenos de la óptica y la electricidad.

Pero esto no es suficiente. Para que una explicación mecánica sea buena, debe ser simple; para escogerla entre todas las posibles explicaciones, debe haber otras razones que la necesidad de hacer una elección. Pues bien, no tenemos, hasta ahora, teoría alguna que satisfaga esta condición y que, por tanto, nos sea de algún uso. ¿Entonces debemos quejarnos? Eso equivaldría a olvidar el fin que buscamos, que no es el mecanismo; el verdadero y único objetivo es la unidad.

Debemos, por consiguiente, establecer algunos límites a nuestra ambición. No busquemos formular una explicación mecánica; estemos contentos con mostrar que siempre podemos encontrar una si así lo deseamos: es en esto en donde hemos tenido éxito. El principio de la conservación de la energía siempre ha sido confirmado, y ahora tiene un compañero en el principio de acción mínima, establecido en la forma apropiada para la física. Esto también ha sido verificado, por lo menos en lo que concierne a los fenómenos reversibles que obedecen las ecuaciones de Lagrange (en otras palabras, que obedecen las leyes más generales de la física). Los fenómenos irreversibles son mucho más difíciles de armonizar; pero ellos, de igual forma, están siendo coordinados y tienden a unificarse. La luz que los ilumina proviene del principio de Carnot. Por mucho tiempo, la termodinámica estuvo confinada al estudio de las dilataciones de los cuerpos y de su cambio de estado. De algún tiempo para acá, ha estado creciendo de manera más audaz, y ha extendido considerablemente su dominio. Debemos a ella las teorías de la pila voltaica y de los fenómenos termoeléctricos; no hay un solo rincón de la física que no haya sido explorado, e incluso se ha asaltado el campo de la química. Las mismas leyes son válidas; en todas partes, disfrazado de una forma u otra, encontramos el principio de Carnot; en todos lados también aparece ese concepto eminentemente abstracto de la entropía, tan universal como el concepto de energía, y que, como él, parece ocultar una realidad. Parecía que el calor radiante se escapaba, pero recientemente ha sido puesto, también, bajo las mismas leyes.

De esta forma, son reveladas nuevas analogías que pueden, comúnmente, perseguirse en detalle: la resistencia eléctrica se asemeja a la viscosidad de los fluidos; la histéresis sería más bien como la fricción de los sólidos. En todos los casos, la fricción parece ser el tipo más imitado por la mayoría de los fenómenos irreversibles, y esta relación es real y profunda.

Una explicación estrictamente mecánica de estos fenómenos también ha sido buscada pero, debido a su naturaleza, es muy difícil que sea encontrada. Para encontrarla, ha sido necesario suponer que la irreversibilidad es sólo aparente, y que los fenómenos elementales son reversibles y obedecen las conocidas leyes de la dinámica. Pero los elementos son extremadamente numerosos, y cada vez se vuelven más mezclados, de manera que, para nuestra cruda vista, todo parece tender hacia la uniformidad, es decir, todo parece progresar en la misma dirección, y sin esperanza alguna de retorno. La aparente irreversibilidad es, por tanto, únicamente un efecto de la ley de grandes números. Sólo un ser con sentidos infinitamente sutiles, como el demonio de Maxwell, podría desenredar esta enredada madeja y retroceder el curso del universo.

Esta concepción, conectada con la teoría cinética de los gases, ha costado grandes esfuerzos y no ha resultado, en general, fructífera; puede que algún día lo sea. Este no es el lugar para examinar si ha llevado a contradicciones, y si está en conformidad con la verdadera naturaleza de las cosas.

Notemos, sin embargo, las originales ideas del señor Gouy sobre el movimiento browniano. De acuerdo con este científico, este movimiento singular no obedece al principio de Carnot. Las partículas que se mueven serían más pequeñas que las mallas de aquella red bien elaborada; y estarían, así, listas para ser separadas, y, de este modo, hacer retroceder el curso del universo. Uno casi puede ver al demonio de Maxwell en acción.

Para resumir. Los fenómenos conocidos desde hace tiempo están siendo gradualmente mejor clasificados, pero los nuevos fenómenos vienen a reclamar su lugar, y la mayoría de ellos, como el efecto Zeeman, lo encontraron en seguida. Después tenemos los rayos catódicos, los rayos X, los rayos de uranio y radio; en fin, todo un mundo sobre el que nunca nadie había sospechado su existencia. ¡Cuántos invitados inesperados a los que hay que encontrar un lugar! Nadie puede predecir aún el lugar que ocuparán, pero no creo que vayan a destrozar la unidad general; pienso que más bien la van a completar. Por un lado, en efecto, las nuevas radiaciones parecen estar conectadas con los fenómenos de la luminosidad; no solamente excitan la fluorescencia, sino que a veces vienen a la existencia bajo las mismas condiciones que aquella propiedad. Ni tampoco está descartada su conexión con la causa que produce la chispa eléctrica bajo la acción de luz ultravioleta. Finalmente, y lo más importante de todo, se cree que, en todos estos fenómenos, existen iones, animados, es verdad, con velocidades mucho mayores que aquellas de los electrolitos. Todo esto es muy vago, pero se volverá más claro.

La fosforescencia y la acción de la luz sobre la chispa fueron regiones más bien aisladas y, consecuentemente, algo descuidadas por los investigadores. Es de esperar que se tome un nuevo camino que facilite sus comunicaciones con el resto de la ciencia. No solamente descubrimos nuevos fenómenos, sino que aquellos que pensamos conocer son revelados bajo aspectos nunca antes vistos. En el éter libre, las leyes preservan su majestuosa simplicidad, pero la materia, propiamente dicha, parece cada vez más compleja; todo lo que podemos decir sobre ella es aproximado, y nuestras fórmulas constantemente requieren nuevos términos.

Pero las clasificaciones permanecen intactas, las relaciones que hemos descubierto entre objetos que pensamos simples siguen siendo válidas entre los mismos objetos cuando su complejidad es reconocida, y eso, por sí mismo, es lo importante. Nuestras ecuaciones se vuelven, es cierto, cada vez más complicadas, y esto para poder abarcar más estrechamente la complejidad de la naturaleza; pero nada ha cambiado en las relaciones que permiten a estas ecuaciones derivar unas de las otras. En una palabra, la forma de estas ecuaciones persiste. Tomemos como ejemplo las leyes de la reflección. Fresnel las estableció a partir de una teoría simple y atractiva que el experimento ha confirmado. Subsecuentemente, investigaciones más precisas han demostrado que esta verificación únicamente era aproximada; fueron detectados rastros de polarización elíptica por todas partes. Pero se debe a la primera aproximación el que se encontrara la causa de estas anomalías en la existencia de una capa de transición, y se ha mantenido todo lo esencial de la teoría de Fresnel. No podemos dejar de reflexionar que todas estas relaciones nunca hubieran sido notadas si hubiese habido duda, en primer lugar, en cuanto a la complejidad de los objetos que conectaban. Hace mucho tiempo se dijo: Si Tycho hubiera tenido instrumentos diez veces más precisos, nunca hubiéramos tenido un Kepler, o un Newton, o astronomía. Es una desgracia para una ciencia el haber nacido demasiado tarde, cuando los medios de observación se han vuelto tan perfectos. Eso es lo que está pasando, en este momento, con respecto a la química física; los fundadores están obstaculizados, en su comprensión general, por terceros y cuartos decimales. Felizmente, son hombre de fe robusta. A medida que conocemos mejor las propiedades de la materia, vemos que reina la continuidad. A partir del trabajo de Andrews y Van der Waals, vemos cómo sucede la transición del estado líquido al gaseoso, y que ésta no es abrupta. De manera similar, no hay brechas entre los estados líquido y sólido, y en los expedientes de un Congreso celebrado recientemente, vimos memorias sobre la rigidez de los líquidos junto con artículos sobre el flujo de los líquidos.

Con esta tendencia, no hay duda que se pierde simplicidad. Tal y cual efecto era representado por líneas rectas; ahora es necesario conectar estas líneas por curvas más o menos complicadas. Por otra parte, se gana en unidad. Las categorías separadas calmaban pero no satisfacían a la mente.

Finalmente, un nuevo dominio, el de la química, ha sido invadido por el método de la física, y somos testigos del nacimiento de la química física. Aún es muy joven, pero ya nos ha permitido conectar fenómenos tales como la electrólisis, la ósmosis, y el movimiento de los iones.

¿Qué podemos concluir de esta exposición superficial? Tomando en cuenta todas las cosas, nos hemos acercado a la realización de la unidad. Esto no se ha hecho tan rápido como esperábamos cincuenta años antes, y el camino predicho no ha sido siempre el seguido, pero, en conjunto, se ha ganado mucho terreno.

CAPÍTULO XI

EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Sin duda el lector estará asombrado por encontrar reflexiones sobre el cálculo de probabilidades en un volumen como este. ¿Qué tiene que ver tal cálculo con la ciencia de la física? Las cuestiones que resucitaré - sin darles, no obstante, solución alguna - son erigidas de manera natural por el filósofo que examina los problemas de la física. Hasta ahora este ha sido el caso, que en los dos capítulos precedentes he utilizado varias veces las palabras "probabilidad" y "casualidad". Los "hechos previstos", como dije arriba, "únicamente pueden ser probables". No importa qué tan sólidamente fundada pueda parecer una predicción, nunca estamos absolutamente seguros que el experimento no la probará como falsa; pero la probabilidad es a menudo tan grande, que prácticamente puede ser aceptada. Y un poco más adelante añadí: "Vean qué parte desempeña en nuestras generalizaciones la creencia en la simplicidad. Hemos verificado una simple ley en un gran número de casos particulares, y nos rehusamos a admitir que esta coincidencia tantas veces repetida sea un mero efecto de la casualidad." Así, en una multitud de circunstancias, el físico se encuentra comúnmente en la misma posición que el apostador que cuenta sus posibilidades. Cada vez que razona por inducción, más o menos requiere conscientemente del cálculo de probabilidades, y es por eso que me veo obligado a exponer este capítulo entre paréntesis, y a interrumpir nuestra discusión del método en las ciencias físicas para poder examinar, un poco más cerca, lo que vale este cálculo, y qué dependencia podemos poner sobre él. El mismo nombre del cálculo de probabilidades es una paradoja. La probabilidad, como opuesta a la certeza, es lo que uno no sabe, ¿y cómo podemos calcular lo ignorado? Aún así, muchos científicos eminentes se han dedicado a este cálculo, y no puede negarse que la ciencia ha sacado de él no pocas ventajas. ¿Cómo podemos explicar esta aparente contradicción? ¿Ha sido definida la probabilidad? ¿Puede incluso ser definida? Y si no es el caso, ¿cómo podemos aventurarnos a razonar sobre ella? La definición, se dirá, es muy simple. La probabilidad de un evento es la razón del número de casos favorables al evento al número total de casos posibles. Un simple ejemplo demostrará qué tan incompleta es esta definición: Arrojo dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los dos, por lo menos, se convierta en un 6? Cada uno puede convertirse en 6 maneras diferentes; el número de casos posibles es $6 \times 6 = 36$. El número de casos favorables es 11; la probabilidad es $\frac{11}{36}$. Tal es la solución correcta. ¿Pero por qué no podemos también proceder, igual de bien, como sigue? Los puntos que se convierten en los dos dados forman $\frac{6 \times 7}{2} = 21$ combinaciones diferentes. Dentro de estas combinaciones, seis son favorables; la probabilidad es $\frac{6}{21}$. Ahora bien, ¿por qué es el primer método para calcular los números de posibles casos más legítimo que el segundo? En cualquier caso, no es la definición la que nos da la respuesta. Estamos, por tanto, obligados a completar la definición al decir: "…al número total de casos posibles, siempre que los casos sean igualmente probables". De manera que ahora estamos obligados a definir lo probable por lo probable. ¿Cómo podemos saber que dos casos posibles son igualmente probables? ¿Será por una convención? Si insertamos, al principio de cada problema, una convención explícita, ¡pues muy bien! Ya no tenemos nada que hacer sino aplicar las reglas aritméticas y algebraicas, y completaremos nuestro cálculo cuando nuestro resultado no pueda ponerse en duda. Pero si deseamos hacer la más mínima aplicación de este resultado, debemos probar que nuestra convención es legítima, y nos encontraremos ante la presencia de la misma dificultad que pensamos haber evitado. Podría decirse que el sentido común es suficiente para mostrarnos la convención a ser adoptada. ¡Ay! El señor Bertrand se ha divertido al discutir el siguiente simple problema: "¿Cuál es la probabilidad de que una cuerda de un círculo sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito?" El ilustre geómetra adoptó sucesivamente dos convenciones que parecían ser igualmente imperativas a los ojos del sentido común, y con una convención encontró que era $\frac{1}{2}$, y con la otra $\frac{1}{3}$. La conclusión que parece seguirse de esto es que el cálculo de probabilidades es una ciencia inútil, y que debemos desconfiar del oscuro instinto que llamamos sentido común, y al cual apelamos para la legitimación de nuestras convenciones. Pero a esta conclusión ya no nos podemos suscribir. No podemos prescindir de ese oscuro instinto. Sin él, la ciencia sería imposible, y sin él nunca podríamos descubrir ni aplicar una ley. ¿Tenemos algún derecho, por ejemplo, para enunciar la ley de Newton? Sin duda, numerosas observaciones están de acuerdo con ella, ¿pero no es esto un simple hecho de casualidad? Y cómo sabemos, además, que esta ley - que ha sido cierta por tantas generaciones - no será falsa en las siguientes. A esta objeción, la única respuesta que uno puede dar es: es muy improbable que tal cosa suceda. Pero hay que conceder la ley. Por medio de ésta, podemos calcular la posición de Júpiter en un año a partir de ahora. Aún así, ¿tengo algún derecho para decir esto? ¿Quién puede decir que una gigantesca masa con enorme velocidad no pasará cerca del sistema solar produciendo perturbaciones imprevistas? Aquí, de nuevo, la única respuesta es esta: es muy improbable. Desde este punto de vista, todas las ciencias sólo serían aplicaciones inconscientes del cálculo de probabilidades. Y si se condena este cálculo, entonces la totalidad de las ciencias debe también ser condenada. No me detendré en detalle en los problemas científicos en donde la intervención del cálculo de probabilidades es más evidente. En el primer plano de éstos está el problema de interpolación, en donde, conociendo un cierto número de valores de una función, intentamos descubrir los valores intermedios. También cabe mencionar la célebre teoría de errores de observación, a la que regresaré después; la teoría cinética de los gases, una hipótesis bien conocida en donde cada molécula gaseosa está supuesta a describir un camino extremadamente complicado, pero en el cual, a través del efecto de los números grandes, los fenómenos medios - que son todo lo que observamos - obedecen las simples leyes de Mariotte y Gay-Lussac. Todas estas teorías están basadas sobre las leyes de los números grandes, y el cálculo de probabilidades evidentemente las haría partícipe de su ruina. Es verdad que estas teorías sólo tienen un interés particular, y que, salvo en lo que a la interpolación concierne, son sacrificios a los que fácilmente podríamos renunciar. Pero como he dicho arriba, no serían estos sacrificios parciales los que estarían en cuestión; sino la legitimidad de toda la ciencia la que sería desafiada. Comprendo muy bien que podría decirse: no sabemos, y aún así debemos actuar. En cuanto a la acción, no tenemos tiempo para dedicarnos a una investigación que resultase suficiente para disipar nuestra ignorancia. Además, tal investigación demandaría un tiempo ilimitado. Debemos, por tanto, constituir nuestras mentes sin conocer. Esto debe hacerse a menudo sin importar lo que pase, y debemos seguir las reglas aunque tengamos poca confianza en ellas. Lo que sé no es que tal cosa es cierta, sino que el mejor camino para mí es actuar como si fuese cierta. El cálculo de probabilidades, y por consecuencia la ciencia por sí misma, carecería de todo valor práctico.

Desafortunadamente, la dificultad no desaparece de esta forma. Un apostador quiere dar un *golpe*, y pregunta por mi consejo. Si se lo doy, lo hago a partir del cálculo de probabilidades; pero no debo garantizar éxito alguno. Eso es a lo que llamaré *probabilidad subjetiva*. En este caso, podemos estar contentos con la explicación de la cual he dado un bosquejo. Pero asumamos que está presente un observador en el juego, que sabe del *golpe*, y que el juego se desarrolla durante mucho tiempo, y, además, que el observador hace un resumen de sus notas. Encontrará que los eventos han tenido lugar en conformidad con las leyes del cálculo de probabilidad. Eso es a lo que llamaré *probabilidad objetiva*, y es este fenómeno el que debe explicarse. Existen numerosas compañías de seguros que aplican las reglas del cálculo de probabilidades, y distribuyen dividendos a sus accionistas, cuya realidad objetiva no puede ser contestada. Para poder explicar esto, debemos hacer más que recurrir a nuestra ignorancia y a la necesidad de acción. De esta forma, no es admisible el escepticismo absoluto. Debemos desconfiar, pero no podemos condenar *en bloque*. Una discusión es, por tanto, necesaria.

1. Clasificación de los problemas de probabilidad. Para clasificar los problemas que se nos presentan con referencia a probabilidades, debemos verlos desde distintos puntos de vista y, antes que todos, desde el de la *generalidad*. Dije antes que la probabilidad es la razón del número de los casos favorables al número de los casos posibles. Lo que - en busca de un mejor término - llamo generalidad se incrementará con el número de casos posibles. Este número puede ser finito, como, por ejemplo, si tomamos un tiro de dados en donde el número de casos posibles es 36. Este es el primer grado de generalidad. Pero si preguntamos, por ejemplo, cuál es la probabilidad de que un punto dentro de un círculo esté dentro del cuadrado inscrito (en tal círculo), habrá tantos casos posibles como haya puntos en el círculo, es decir, un número infinito. Este es el segundo grado de generalidad. La generalidad se puede llevar todavía más lejos. Podemos preguntar la probabilidad de que una función satisfaga una condición dada. Habrá, entonces, tantos casos posibles como uno pueda imaginar diferentes funciones. Este es el tercer grado de generalidad, que alcanzamos, por ejemplo, cuando intentamos encontrar la ley más probable después de un número finito de observaciones. Con todo esto, podemos adoptar un punto de vista muy distinto. Si no fuésemos ignorantes, no habría probabilidad, sino únicamente certeza. Pero nuestra ignorancia no puede ser absoluta, porque entonces no habría probabilidad en absoluto. Así, los problemas de la probabilidad pueden clasificarse de acuerdo con la mayor o menor profundidad de esta ignorancia. En las matemáticas, podemos establecer problemas de probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto decimal de un logaritmo tomado al azar de una tabla sea 9? No hay vacilación en responder que esta probabilidad es $1-10$. Aquí poseemos todos los datos del problema. Podemos calcular nuestro logaritmo sin recurrir a la tabla, pero no necesitamos tal problema. Este es el primer grado de ignorancia. En las ciencias físicas, nuestra ignorancia ya es mayor. El estado de un sistema en un momento dado depende de dos cosas: su estado inicial, y la ley de acuerdo con la cual tal estado varía. Si conocemos ambas (esta ley y su estado inicial), tenemos por resolver un simple problema matemático, y regresamos a nuestro primer grado de ignorancia. A menudo sucede que conocemos la ley pero no el estado inicial. Podría preguntarse, por ejemplo, ¿cuál es la distribución presente de los planetas menores? Sabemos que, desde siempre, han obedecido las leyes de Kepler, pero no sabemos cuál era su distribución inicial. En la teoría cinética de los gases, asumimos que las moléculas gaseosas siguen caminos rectilíneos y obedecen las leyes de impacto y de los cuerpos elásticos; a pesar de esto, como no sabemos nada acerca de sus velocidades iniciales, no sabemos nada de sus velocidades presentes. El cálculo de probabilidades, por sí mismo, nos permite predecir los fenómenos medios que resultarán de una combinación de estas velocidades. Este es el segundo grado de ignorancia. Finalmente, es posible que no sólo sean desconocidas las condiciones iniciales, sino también las leyes por sí mismas. Entonces llegamos al tercer grado de ignorancia y, en general, ya no podemos afirmar nada acerca de la probabilidad del fenómeno. A menudo sucede que, en lugar de intentar descubrir un evento por medio de un conocimiento más o menos imperfecto de la ley, conozcamos los eventos, y queramos encontrar la ley; o que, en lugar de deducir los efectos a partir de las causas, deseemos deducir las causas a partir de los efectos. Ahora bien, estos problemas están clasificados como *probabilidad de causas*, y son los más interesantes de todos debido a sus aplicaciones científicas. Yo estoy jugando *écarté* con un caballero que sé es perfectamente honesto. ¿Cuál es la probabilidad de que saque rey? Es $\frac{1}{8}$. Este es un problema de la probabilidad de los efectos. Estoy jugando con un caballero que no conozco. Ha repartido diez veces, y ha sacado al rey seis veces. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un estafador? Este es un problema de la probabilidad de causas. Podría decirse que es el problema esencial del método experimental. He observado *n* valores de *x* y los correspondientes valores de *y*. He encontrado que la razón (proporción) de los últimos a los primeros es prácticamente constante. Ahí está el evento, ¿cuál es la causa? ¿Es probable que exista una ley general de acuerdo con la cual *y* sea proporcional a *x*, y que las pequeñas divergencias se deban a errores de observación? Este es el tipo de cuestión que siempre estamos preguntándonos, y que inconscientemente resolvemos cuando estamos comprometidos con el trabajo científico. Ahora pasaré a revisar estas distintas categorías de problemas al discutir, en sucesión, lo que he llamado probabilidad subjetiva y objetiva.

II. Probabilidad en matemáticas. La imposibilidad de obtener la cuadratura del círculo fue demostrada en 1885, pero antes de esa fecha, todos los geómetras consideraban esta imposibilidad tan "probable" que la Académie des Sciencies rechazaba, sin examen alguno, las numerosas memorias que sobre este tema enviaban cada año unos pocos e infelices locos. ¿Estaba equivocada la Académie? Evidentemente no, y sabía perfectamente bien que, al actuar de esta manera, no corría el menor riesgo de sofocar un descubrimiento del momento. La Académie no pudo haber probado que estaba en lo correcto, pero sabía muy bien que su instinto no la engañaría. Si se hubiese preguntado a los académicos, hubieran respondido: "Hemos comparado la probabilidad de que un científico desconocido haya encontrado lo que en vano ha sido buscado por tanto tiempo, con la probabilidad que haya un loco más sobre la Tierra, y lo último nos ha parecido lo más probable". Estas son muy buenas razones, pero no hay nada matemático sobre ellas; son razones puramente psicológicas. Si se les hubiera presionado más, hubieran añadido: "¿Por qué esperar que un valor particular de una función trascendental sea un número algebraico? Si π es la raíz de una ecuación algebraica, ¿por qué esperar que esta raíz sea un periodo de la función *sen* $2x$?, ¿y por qué no es lo mismo con las otras raíces de la misma ecuación?" Para resumir, hubieran recurrido al principio de razón suficiente en su forma más vaga. Aún así, ¿qué información hubieran podido haber sacado de esto? Como mucho, una regla de conducta para el empleo de su tiempo, que sería más útil dedicarlo a su trabajo ordinario que a leer una lucubración que inspiraba en ellos una desconfianza legítima. Pero lo que llamé arriba probabilidad objetiva no tiene nada en común con este primer problema. Tiene más bien que ver con el segundo. Consideremos los primeros 10,000 logaritmos que encontramos en una tabla. De entre estos 10,000 logaritmos, tomemos uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su tercer decimal sea un número par? Se respondería, sin vacilación alguna, que la probabilidad es $\frac{1}{2}$, y, en realidad, si en una tabla se escogen los terceros decimales en estos 10,000 logaritmos, se encontrarán casi tantos dígitos pares como impares. O, si se prefiere, escribamos 10,000 números correspondientes a nuestros 10,000 logaritmos, escribiendo, para cada uno de estos números, $+1$ si el tercer decimal del logaritmo correspondiente es par, y -1 si es impar; y después tomemos la media de estos 10,000 números. No dudaríamos en decir que la media de estas 10,000 unidades probablemente es cero, y si se calculara de manera práctica, verificaríamos que es extremadamente pequeña. Pero esta verificación es innecesaria. Podríamos haber probado rigurosamente que esta media es menor que 0.003. Para probar este resultado, hubiéramos tenido que realizar un cálculo bastante grande, para el cual no hay espacio aquí, y para el cual, también, remito al lector a un artículo que publiqué en la *Revue générale des sciencies*, el 15 de abril de 1889. El único punto sobre el que quiero llamar la atención es el siguiente. En este cálculo, tuve ocasión de exponer mi caso únicamente sobre dos hechos, a saber, que la primera y segunda derivadas del logaritmo se mantienen, en el intervalo considerado, dentro de ciertos límites. Por tanto, nuestra primera conclusión es que la propiedad no sólo es cierta del logaritmo, sino de cualquier función continua, debido a que las derivadas de cualquier función continua están limitadas. Si de antemano tuve certeza acerca del resultado, es porque a menudo he observado hechos análogos para otras funciones continuas; y, además, porque atravesé mi mente de una manera más o menos inconsciente e imperfecta, cuyo razonamiento me condujo a las desigualdades precedentes, de igual forma que un calculador hábil, antes de terminar su multiplicación, considera de manera aproximada el resultado al que debe llegar. Y además, debido a que lo que yo llamo mi intuición fue únicamente el resumen incompleto de una pieza de verdadero razonamiento, es claro que la observación ha confirmado mis predicciones, y que las probabilidades objetiva y subjetiva están en concordancia. Como tercer ejemplo, escogeré el siguiente: el número u es tomado al azar y n es un número entero muy grande dado. ¿Cuál es el valor medio de sen nu? Este problema, por sí mismo, no tiene sentido. Para darle uno, es necesaria una convención, a saber, acordamos que la probabilidad para que el número u se encuentre entre a y $a+da$ es $\phi(a)da$; que es, por tanto, proporcional al intervalo infinitamente pequeño da, y es igual a esto multiplicado por una función $\phi(a)$, únicamente dependiendo de a. En cuanto a esta función se refiere, la escogí arbitrariamente, pero debo asumirla como continua. Si el valor de sen nu se mantiene el mismo cuando u se incrementa por 2π, puedo asumir, sin perder generalidad, que u se encuentra entre 0 y 2π, y debo así suponer que $\phi(a)$ es una función periódica cuyo periodo es 2π. El valor medio que buscamos es fácilmente expresado por una simple integral, y es sencillo demostrar que esta integral es menor que $\frac{2\pi M_K}{n^K}$, M_K siendo el valor máximo de la K derivada de

$\phi(u)$. Vemos entonces que si la κ derivada es finita, nuestro valor medio tenderá hacia cero cuando n se incremente indefinidamente, y que más rápidamente que $\frac{1}{n^{K-1}}$. El valor medio de sen nu cuando n sea muy grande es, por tanto, cero. Para definir este valor, requerí una convención, pero el resultado se mantiene el mismo *cualquiera sea tal convención*. He impuesto sobre mí pequeñas restricciones cuando asumí que la función $\phi(a)$ es continua y periódica, y estas hipótesis son tan naturales que podemos preguntarnos cómo se pueden escapar. Un examen de los tres ejemplos precedentes, tan distintos en todos los aspectos, ya nos ha dado una visión sobre, por una parte, el papel de lo que los filósofos llaman el principio de razón suficiente, y, por otra parte, sobre la importancia del hecho que ciertas propiedades son comunes a todas las funciones continuas. El estudio de la probabilidad en las ciencias físicas nos llevará al mismo resultado.

III. Probabilidad en las ciencias físicas. Ahora llegamos a los problemas relacionados con lo que he llamado el segundo grado de ignorancia, a saber, aquellos en los que conocemos la ley pero no el estado inicial del sistema. Podría multiplicar los ejemplos, pero sólo tomaré uno. ¿Cuál es la probable distribución presente de los planetas menores sobre el zodiaco? Sabemos que obedecen las leyes de Kepler. Incluso podemos suponer - sin cambiar la naturaleza del problema - que sus órbitas son circulares y están situadas en el mismo plano, un plano que nos es dado. Por otra parte, no sabemos absolutamente nada acerca de su distribución inicial. Sin embargo, no dudamos al afirmar que esta distribución es, ahora, casi uniforme. ¿Por qué? Sea b la longitud de un planeta menor en la época inicial, es decir, en la época cero. Sea a su movimiento medio. Su longitud en el tiempo presente, es decir, en el tiempo t, será $at+b$. Decir que la distribución presente es uniforme equivale a decir que el valor medio de los senos y cosenos de los múltiplos de $at+b$ es cero. ¿Por qué afirmamos esto? Representemos nuestro planeta menor por un punto en un plano, a saber, el punto cuyas coordenadas son a y b. Todos estos puntos representativos estarán contenidos en una cierta región del plano, pero como son muy numerosos, esta región parecerá salpicada de puntos. No sabemos nada más acerca de la distribución de los puntos. Ahora bien, ¿qué es lo que hacemos cuando aplicamos el cálculo de probabilidades a una cuestión como esta? ¿Cuál es la probabilidad de que uno o más puntos representativos puedan ser encontrados en una cierta porción del plano? Debido a nuestra ignorancia, estamos obligados a hacer una hipótesis arbitraria. Para explicar la naturaleza de esta hipótesis, me permitiré utilizar, en lugar de una fórmula matemática, una imagen cruda pero concreta. Supongamos que, sobre la superficie de nuestro plano, ha sido esparcida materia imaginaria, cuya densidad es variable pero continua. Estaremos entonces de acuerdo al decir que el número probable de puntos representativos a ser encontrados sobre una cierta porción del plano es proporcional a la cantidad de esta materia imaginaria que se encuentra en tal plano. Si hay, entonces, dos regiones del plano con la misma extensión, las probabilidades de que un punto representativo de uno de nuestros planetas menores se encuentre en una o en otra de estas regiones serán como las densidades medias de la materia imaginaria en una u otra de las regiones. Aquí, pues, hay dos distribuciones, una real, en donde los puntos representativos son muy numerosos, muy juntos unos con otros, pero discretos como las moléculas de la materia en la hipótesis atómica; y otra distribución distante de la realidad, en donde nuestros puntos representativos son reemplazados por materia imaginaria continua. Sabemos que la última no puede ser real, pero nos vemos forzados a adoptarla debido a nuestra ignorancia. Si, de nuevo, tuviésemos alguna idea de la distribución real de los puntos representativos, podríamos disponerla de tal manera que, en una región de alguna extensión, la densidad de esta materia imaginaria continua sea cercanamente proporcional al número de puntos representativos o, si se prefiere, al número de átomos contenidos en tal región. Incluso eso es imposible, y nuestra ignorancia es tan grande que nos vemos forzados a escoger arbitrariamente la función que defina la densidad de nuestra materia imaginaria. Nos veremos obligados a adoptar una hipótesis de la cual difícilmente podamos escapar: debemos suponer que esta función es continua. Esto será suficiente, como veremos, para alcanzar nuestra conclusión.

¿Cuál es, en el instante *t*, la probable distribución de los planetas menores? O mejor dicho, ¿cuál es el valor medio del seno de la longitud en el momento *t*, es decir, del seno $(at+b)$? Al principio, hicimos una convención arbitraria, y si la adoptamos, este valor está completamente definido. Descompongamos el plano en elementos de superficie. Consideremos el valor de seno $(at+b)$ al centro de cada uno de estos elementos. Multipliquemos este valor por la superficie del elemento y por la densidad correspondiente de la materia imaginaria. Tomemos después la suma para todos los elementos del plano. Esta suma, por definición, será el probable valor medio que buscamos, y será así expresado por una integral doble. Podría pensarse, al principio, que este valor medio depende de la elección de la función ϕ que define la densidad de la materia imaginaria, y, como esta función ϕ es arbitraria, bien podríamos, de acuerdo con la elección arbitraria que hicimos, obtener un cierto valor medio. Pero este no es el caso. Un simple cálculo demuestra que nuestra integral doble decrece rápidamente a medida que t aumenta. De esta forma, no podemos decir qué hipótesis hacer en cuanto a la probabilidad de esta o de tal distribución inicial, pero, una vez hecha la hipótesis, el resultado será el mismo, y esto nos libra de toda dificultad. Cualquiera sea la función ϕ, el valor medio tiende hacia cero cuando t aumenta, y como los planetas menores ciertamente han recorrido un gran número de revoluciones, podemos asegurar que este valor medio es muy pequeño. Podemos dar a ϕ cualquier valor que elijamos, con una restricción: esta función debe ser continua; y, en realidad, desde el punto de vista de la probabilidad subjetiva, la elección de una función discontinua hubiera sido irracional. ¿Qué razón pudimos haber tenido, por ejemplo, para suponer que la longitud inicial pudiera ser exactamente 0°, pero que no pudo haber estado entre 0° y 1°?

La dificultad reaparece si vemos la cuestión desde el punto de vista de la probabilidad objetiva: si pasamos de nuestra distribución imaginaria - en donde la materia supuesta fue asumida como continua - a la distribución real, en donde nuestros puntos representativos están formados como átomos discretos. El valor medio del seno $(at+b)$ estará fácilmente representado por

$$\frac{1}{n}\sum sen(at+b),$$

n siendo el número de planetas menores. En lugar de una integral doble referente a una función continua, tendremos una suma de términos discretos. No obstante, nadie dudaría seriamente que este valor medio sea prácticamente muy pequeño. Estando nuestros puntos representativos muy cercanos unos con otros, nuestra suma discreta diferirá, en general, muy poco de una integral. Una integral es el límite hacia el que tiende una suma de términos cuando el número de estos términos se incrementa de manera indefinida. Si los términos son muy numerosos, la suma diferirá muy poco de su límite, esto es, de la integral, y lo que dije sobre lo último será verdadero para la suma por sí misma. Pero existen excepciones. Si, por ejemplo, para todos los planetas menores $b=\frac{\pi}{2}-at$, la longitud de todos los planetas en el tiempo t será $\frac{\pi}{2}$, y el valor medio en cuestión será evidentemente una unidad. Para que esto sea el caso en el tiempo *0*, los planetas menores tuvieron todos que haber yacido sobre una especie de espiral de forma peculiar, con sus espirales muy juntas unas con otras. Todos admiten que tal distribución inicial es extremadamente improbable (e incluso si fuese llevada a cabo, la distribución no sería uniforme en el tiempo presente - por ejemplo, el 1ero de enero de 1900 -, pero se volvería así unos pocos años más tarde). ¿Por qué, entonces, pensamos como improbable esta distribución inicial? Esto debe ser explicado, porque si estamos equivocados al rechazar como improbable esta absurda hipótesis, nuestra investigación se viene abajo, y ya no podemos afirmar nada sobre la probabilidad de esta o de tal presente distribución. Una vez más, debemos invocar al principio de razón suficiente, al que siempre debemos recurrir. Podríamos admitir que, al principio, los planetas estaban distribuidos casi en una línea recta. Podríamos admitir que estaban distribuidos de manera irregular. Sin embargo, nos parece que no hay una razón suficiente - para la desconocida causa que les dio nacimiento - para haber actuado a lo largo de una curva tan regular y, al mismo tiempo, tan complicada, que parece haber sido escogida expresamente para que la distribución, al día de hoy, no sea uniforme.

IV. Rojo y negro. Las cuestiones surgidas por los juegos de casualidad, tales como la ruleta, son, fundamentalmente, análogos a aquellos que acabamos de considerar. Por ejemplo, una rueda está dividida en treinta y siete compartimientos iguales, alternativamente rojos y negros. Se hace girar una bola alrededor del círculo, y después de haberse movido alrededor un número de veces, se detiene en frente de una de estas subdivisiones. La probabilidad de que la división sea roja es obviamente $\frac{1}{2}$. La aguja describe un ángulo θ, incluyendo varias revoluciones completas. Desconozco cuál es la probabilidad de que la bola sea hecha girar con tal fuerza que este ángulo yazca entre θ y $\theta + d\theta$, pero puedo hacer una convención. Puedo suponer que esta probabilidad es $\phi(\theta)d\theta$. En cuanto a la función $\phi(\theta)$, puedo escogerla de una forma totalmente arbitraria. No tengo nada que guíe mi elección, pero naturalmente me veo inducido a suponer la función como continua. Sea ϵ una longitud (medida sobre la circunferencia del círculo de la unidad de radio) de cada compartimiento rojo y negro. Tenemos que calcular la integral de $\phi(\theta)d\theta$, extenderla, por una parte, a todos los compartimientos rojos y, por otra, a todos los compartimientos negros, y después comparar los resultados. Consideremos un intervalo 2ϵ que comprenda dos compartimientos consecutivos rojo y negro. Sean M y m los valores máximo y mínimo de la función $\phi\theta$ en este intervalo. La integral extendida a los compartimientos rojos será menor que

$\sum M\varepsilon$; extendida a los negros será mayor que $\sum m\varepsilon$. La diferencia será, por tanto, menor que $\sum (M-m)\varepsilon$. Pero si la función ϕ está supuesta como continua, y si, por otro lado, el intervalo ϵ es muy pequeño con respecto al ángulo total descrito por la aguja, la diferencia $M-m$ será muy pequeña. La diferencia de las dos integrales será, por consiguiente, muy pequeña, y la probabilidad será muy cercana a $\frac{1}{2}$. Vemos que, sin saber nada acerca de la función ϕ, debemos actuar como si la probabilidad fuese $\frac{1}{2}$. Y, además, se explica por qué, desde el punto de vista objetivo, si observo un cierto número de *lanzamientos*, la observación me dará casi tantos *lanzamientos* negros como rojos. Todos los jugadores conocen esta ley objetiva, pero comúnmente los conduce a un error considerable, que a menudo ha sido expuesto, pero al que se sigue cayendo. Cuando ha ganado el rojo, por ejemplo, seis veces consecutivas, apuestan al negro, pensando que están jugando un juego absolutamente seguro, porque, dicen, es muy raro que el rojo gane siete veces consecutivas. En realidad, su probabilidad de ganar sigue siendo $\frac{1}{2}$. La observación muestra, es cierto, que la serie de siete rojos consecutivos es muy rara, pero las series de seis rojos seguidos por un negro son también muy raras. Han notado la rareza de la serie de siete rojos; si no han observado la rareza de seis rojos y un negro, es simplemente porque tal serie llama menos la atención.

V. La probabilidad de causas. Llegamos ahora a los problemas de la probabilidad de causas, los más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones científicas. Dos estrellas, por ejemplo, se encuentran muy juntas en la esfera celestial. ¿Es esta aparente contigüidad un mero efecto de la casualidad? ¿Están estas estrellas - aunque casi sobre la misma línea visual - situadas a distancias muy distintas de la Tierra, y, por tanto, muy lejos en realidad una de la otra? ¿O lo aparente corresponde a una contigüidad real? este es un problema de la probabilidad de causas.

Antes que nada, recuerdo que, al principio de todos los problemas de probabilidad de efectos que han ocupado nuestra atención hasta ahora, tuvimos que usar una convención más o menos justificada; y si en la mayoría de los casos el resultado se debió a una cierta extensión independiente de esta convención, fue únicamente la convención de ciertas hipótesis la que nos permitió, *a priori*, rechazar funciones discontinuas o, por ejemplo, ciertas convenciones absurdas. Debemos de nuevo encontrar algo análogo a esto cuando tratemos con la probabilidad de causas. Un efecto puede ser producido por la causa *a* o por la causa *b*. El efecto sólo ha sido observado. Nos preguntamos por la probabilidad de que se deba a la causa *a*. Esta es una probabilidad de causa *a posteriori*. Pero podría no calcularla, si una convención más o menos justificada no me dijera, por adelantado, cuál es la probabilidad *a priori* para que la causa *a* entre en juego: me refiero a la probabilidad de este evento para alguien que no ha observado el efecto. Para hacer más claro lo que estoy diciendo, regresemos al juego de cartas mencionado antes. Mi adversario reparte por primera vez y saca un rey. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un estafador? Las fórmulas ordinariamente enseñadas dan $\frac{8}{9}$, un resultado obviamente más que sorprendente. Si miramos más cerca, vemos que se llega a tal conclusión como si, antes de sentarme a jugar, hubiera considerado que había una probabilidad en dos de que mi adversario no fuera honesto. Una hipótesis absurda, porque en tal caso ciertamente no hubiera jugado con él; y esto explica lo absurdo de la conclusión. La función sobre la probabilidad *a priori* no estaba justificada, y es por eso que la conclusión de la probabilidad *a posteriori* me condujo a un resultado inadmisible. La importancia de esta convención preliminar es obvia. Incluso podría añadir que si ninguna fuese hecha, el problema de la probabilidad *a posteriori* carecería de sentido. Siempre debe hacerse, ya sea explícita o tácitamente.

Pasemos a un ejemplo con un carácter más científico. Requiero determinar una ley experimental; esta ley, descubierta, puede ser representada por una curva. Realizo un cierto número de observaciones aisladas, cada una de las cuales puede ser representada por un punto. Una vez obtenidos estos distintos puntos, trazo entre ellos una curva de la manera más cuidadosa posible, dando a mi curva una forma regular, evitando ángulos agudos, inflexiones acentuadas, y cualquier variación súbita del radio de la curvatura. Esta curva representará la probable ley, y no solamente me dará los valores de las funciones intermediarias a aquellos que han sido observados, sino que también me dará los valores observados de una manera más exacta que la observación directa; esto es por lo que hago que la curva pase cerca de los puntos y no a través de ellos.

Aquí, pues, hay un problema en la probabilidad de causas. Los efectos son mediciones que he registrado, y dependen de la combinación de dos causas: la verdadera ley del fenómeno y de errores de observación. Conociendo los efectos, tenemos que encontrar la probabilidad de que el fenómeno obedezca esta ley o aquella, y de que las observaciones hayan estado acompañadas por este o aquel error. La ley más probable, por tanto, corresponde a la curva que hemos trazado, y el error más probable está representado por la distancia del punto correspondiente a tal curva. Pero el problema no tiene sentido si antes de las observaciones tuve una idea *a priori* de la probabilidad de esta ley o aquella, o de las probabilidades de error a las que estoy expuesto. Si mis instrumentos son buenos (y sabía si esto era así o no antes de comenzar con las observaciones), no debo trazar la curva lejos de los puntos que representan las toscas mediciones. Si son inferiores, puedo trazarla un poco más lejos de los puntos, de tal forma que obtenga una curva menos sinuosa; mucho será sacrificado por la regularidad.

¿Por qué, entonces, trazo una curva sin sinuosidades? Porque considero, *a priori*, una ley representada por una función continua (o una función cuyas derivadas, a un orden mayor, son pequeñas) como más probable que una ley que no satisfaga tales condiciones. Pero para esta convicción el problema no tendría sentido; la interpolación sería imposible, ninguna ley podría deducirse de un número finito de observaciones, y la ciencia dejaría de existir.

Hace cincuenta años, los físicos consideraban - otras cosas en igualdad de condiciones - una ley simple como más probable que una ley complicada. Este principio incluso fue invocado a favor de la ley de Mariotte en detrimento de la de Regnault. Pero esta creencia es ahora repudiada; y, aún así, ¡cuántas veces nos vemos obligados a actuar como si todavía la celebráramos! Sea como fuere, lo que queda de esta tendencia es la creencia en la continuidad, y, como hemos visto, si la creencia en la continuidad desapareciera, la ciencia experimental sería imposible.

VI. La teoría de errores. Llegamos de esta manera a considerar la teoría de errores, que está directamente relacionada con el problema de la probabilidad de causas. Aquí de nuevo encontramos *efectos*, esto es, un cierto número de observaciones irreconciliables, e intentamos encontrar las *causas* que son, por un lado, el verdadero valor de la cantidad a ser medida y, por el otro, el error hecho en cada observación aislada. Debemos calcular el valor probable *a posteriori* de cada error, y, por tanto, el valor probable de la cantidad a ser medida. Pero, como he explicado, no podemos llevar a cabo este cálculo a menos que admitamos *a priori* - es decir, antes de cualesquiera observaciones hechas - que hay una ley de probabilidad de errores. ¿Hay una ley de errores? La ley que todos los calculadores consienten es la ley de Gauss, representada por una cierta curva trascendental conocida como la “campana”.

Per antes que nada, es necesario recordar la clásica distinción entre errores sistemáticos y accidentales. Si el metro con el que medimos una longitud es demasiado largo, el número que obtendremos será demasiado pequeño, y será inútil medir varias veces. Tal es un error sistemático. Si medimos con un metro preciso, podemos cometer un error, y encontrar la longitud a veces demasiado larga y a veces demasiado corta, y cuando tomamos la media de un gran número de mediciones, el error tenderá a ser menor. Estos son errores accidentales.

Es claro que los errores sistemáticos no satisfacen la ley de Gauss, ¿pero lo hacen los errores accidentales? Se han intentado numerosas pruebas, casi todas ellas crudos paralogismos. Pero, comenzando con la siguiente hipótesis, podemos probar la ley de Gauss: el error es el resultado de un gran número de errores parciales e independientes; cada error parcial es muy pequeño y obedece cualquier ley de probabilidad, siempre que la probabilidad de un error positivo sea la misma que la de un error negativo equivalente. Es evidente que estas condiciones a menudo - aunque no siempre - se cumplirán, y podemos reservar el nombre de accidental para aquellos errores que las satisfagan.

Vemos que el método de mínimos cuadrados no es legítimo en cada caso. En general, los físicos tienen más desconfianza hacia él que los astrónomos. Sin duda, esto es así porque estos últimos, aparte de los errores sistemáticos a los que - igual que los físicos - están sujetos, tienen que enfrentarse con una fuente de error extremadamente importante que es completamente accidental: me refiero a las ondulaciones atmosféricas. De manera que es muy curioso escuchar una discusión entre un físico y un astrónomo acerca de un método de observación. El físico, persuadido de que una buena medición vale más que muchas malas, está preeminentemente preocupado con la eliminación de errores a partir de tomar cada precaución posible en los errores sistemáticos finales; el astrónomo replica: “Pero únicamente puedes observar un pequeño número de estrellas, y los errores accidentales no desaparecerán”.

¿Qué conclusión debemos sacar? ¿Debemos continuar utilizando el método de mínimos cuadrados? Debemos hacer una distinción. Hemos eliminado todos los errores sistemáticos sobre los que tenemos alguna sospecha; estamos muy seguros que todavía hay otros, pero no los podemos detectar; y aún así debemos decidirnos y adoptar un valor definitivo que sea considerado como el valor probable. Y para tal propósito, es claro que lo mejor que podemos hacer es aplicar la ley de Gauss. Únicamente hemos aplicado una regla práctica referente a la probabilidad subjetiva. Y no hay nada más que decir.

Todavía queremos ir más lejos y decir no sólo que el valor probable es tanto, sino que el error probable en el resultado es tanto. *Esto es absolutamente inválido*: sería cierto si estuviésemos seguros de que todos los errores sistemáticos han sido eliminados, y de tal cosa no sabemos totalmente nada. Tenemos dos series de observaciones; al aplicar la ley de mínimos cuadrados, encontramos que el error probable en la primera serie es dos veces más pequeño que en la segunda. La segunda serie puede ser, no obstante, más exacta que la primera, porque ésta está probablemente afectada por un gran error sistemático. Todo lo que podemos decir es que la primera serie es *probablemente* mejor que la segunda porque su error accidental es menor, y que no tenemos razón alguna para afirmar que el error sistemático es mayor en una de las series que en la otra, debido a que nuestra ignorancia sobre este punto es absoluta.

VII. Conclusiones. En las líneas precedentes he expuesto varios problemas, y no he dado ninguna solución. No lamento esto, porque quizá eso invite al lector a reflexionar sobre estas cuestiones delicadas.

Sea como fuere, hay ciertos puntos que parecen estar bien establecidos. Para llevar a cabo el cálculo de cualquier probabilidad, e incluso para que tal cálculo tenga un significado en absoluto, debemos admitir, como punto de partida, una hipótesis o convención que siempre tiene algo arbitrario al respecto. En la elección de esta convención, podemos estar guiados únicamente por el principio de razón suficiente. Desafortunadamente, este principio es muy vago y elástico, y, en el examen superficial que acabamos de hacer, hemos visto que asume distintas formas. La forma bajo la cual lo encontramos más a menudo es la creencia en la continuidad, una creencia difícil de justificar a partir de un razonamiento apodíctico, pero sin el cual toda la ciencia sería imposible. Finalmente, los problemas a los cuales puede ser aplicado el cálculo de probabilidades con algún beneficio son aquellos en donde el resultado es independiente de la hipótesis hecha al principio, siempre que esta hipótesis satisfaga la condición de continuidad.

CAPÍTULO XII[††]

ÓPTICA Y ELECTRICIDAD

La teoría de Fresnel. El mejor ejemplo que puede ser escogido es la teoría de la luz y sus relaciones con la teoría de la electricidad. Se debe a Fresnel que la ciencia de la óptica esté más avanzada que cualquier otra rama de la física. La teoría llamada teoría de las ondulaciones forma un todo completo y satisfactorio para la mente, pero no debemos pedirle lo que no puede darnos. El propósito de las teorías matemáticas no es revelar la naturaleza real de las cosas; eso sería una pretensión irracional. Su único propósito es coordinar las leyes físicas con las que informamos del experimento físico, cuya enunciación, sin la ayuda de las matemáticas, seríamos incapaces de efectuar. Si el éter existe o no importa poco - dejemos tal cuestión a los metafísicos -; lo que es esencial para nosotros es que todo sucede como si existiese, y que esta hipótesis es adecuada para la explicación de los fenómenos. Después de todo, ¿tenemos alguna otra razón para creer en la existencia de los objetos materiales? Eso, también, es únicamente una hipótesis conveniente, excepto que nunca dejará de ser así; y algún día, sin duda, el éter será dejado a un lado debido a su inutilidad.

Pero en el momento actual son válidas las leyes de la óptica y las ecuaciones que las transforman en el lenguaje analítico (por lo menos como una primera aproximación). Por tanto, siempre será útil estudiar una teoría que logre conectar estas ecuaciones.

La teoría ondulatoria está basada sobre una hipótesis molecular; esto supone una ventaja para aquellos que piensan poder descubrir la causa bajo la ley. Pero otros encuentran en esto una razón para desconfiar, y esta desconfianza me parece tan infundada como las ilusiones de los primeros. Estas hipótesis desempeñan un papel secundario. Pueden ser sacrificadas, y la única razón por la que no se hace esto es porque conllevaría a una cierta pérdida de lucidez en la explicación. En realidad, si miramos la cuestión un poco más cerca, veremos que de las hipótesis moleculares tomamos solamente dos cosas: el principio de la conservación de la energía, y la forma lineal de las ecuaciones, que es la ley general de pequeños movimientos así como de

[††] Este capítulo ha sido principalmente tomado de los prefacios de dos de mis libros: *Théorie mathématique de la lumière* (París: Naud, 1889) y *Électricité et optique* (París: Naud, 1901).

pequeñas variaciones. Esto explica por qué la mayoría de las conclusiones de Fresnel permanecen sin cambios cuando adoptamos la teoría electromagnética de la luz.

La teoría de Maxwell. Todos sabemos que fue Maxwell quien relacionó, por un fino lazo, dos ramas de la física: la óptica y la electricidad, hasta ese entonces insospechosas de tener cualquier cosa en común. Así, mezclada en un agregado más grande, en una armonía mayor, la teoría óptica de Fresnel no pereció. Algunas de sus partes aún están vivas, y sus relaciones mutuas siguen siendo las mismas. Únicamente el lenguaje que usamos para expresarlas ha cambiado, y, además, Maxwell nos ha revelado otras relaciones, hasta ahora insospechadas, entre las distintas ramas de la óptica y de la electricidad.

Si un hombre francés lee por primera vez un libro de Maxwell, ve cómo su admiración es templada por un sentimiento de inquietud, y muchas veces de desconfianza.

Es sólo después de un estudio prolongado, y después de mucho esfuerzo, que esta sensación desaparece. Algunas mentes de alto calibre nunca pierden esta sensación. ¿Por qué nos es tan difícil aclimatarnos a las ideas de este científico inglés? Sin duda, la educación recibida por la mayoría de los hombres franceses ilustrados los predispone a apreciar la precisión y la lógica más que cualesquiera otras cualidades. A este respecto, las viejas teorías de la física matemática nos dieron una satisfacción completa. Todos nuestros maestros, desde Laplace hasta Cauchy, procedieron según las mismas líneas. Comenzando por hipótesis claramente enunciadas, dedujeron de ellas todas sus consecuencias con rigor matemático, y luego las compararon con el experimento. Su objetivo parecía ser dar a cada una de las ramas de la física la misma precisión que a la mecánica celeste.

Una mente acostumbrada a admirar tales modelos no se satisface fácilmente con una teoría. No solamente no toleraría la menor apariencia de contradicción, sino que esperaría que las distintas partes estén lógicamente conectadas unas con las otras, y esperaría que el número de hipótesis se redujera al mínimo.

Esto no es todo; habría otras demandas que me parecen menos razonables. Detrás de la materia de la cual están conscientes nuestros sentidos, y que se da a conocer por el experimento, tal pensador esperaría encontrar otro tipo de materia - la única materia verdadera, en su opinión - que no tendría nada más que puras cualidades geométricas, y cuyos átomos serían puntos matemáticos sujetos únicamente a las leyes de la dinámica. Y aún así intentaría representarse a sí mismo, a partir de una contradicción inconsciente, estos átomos invisibles y desprovistos de color, y, por consiguiente, juntarlos tanto como sea posible con la materia ordinaria.

Solamente así estaría plenamente satisfecho, y entonces imaginaría que ha penetrado el secreto del universo. Incluso si la satisfacción es falaz, es difícil renunciar a ella. De esta forma, al abrir las páginas de Maxwell, un hombre francés espera encontrar un todo teórico, tan lógico y tan preciso como la óptica física que se encuentra sobre la hipótesis del éter. Se está preparando para una desilusión que me gustaría evitar al lector; de tal forma que le advertiré, de una vez, sobre lo que encontrará y sobre lo que no encontrará en Maxwell.

Maxwell no ofrece una explicación mecánica de la electricidad y el magnetismo; se limita a mostrar que tal explicación es posible. Demuestra que los fenómenos de la óptica son solamente un caso particular de los fenómenos electromagnéticos. A partir de toda la teoría de la electricidad, puede ser inmediatamente deducida una teoría de la luz. Desafortunadamente, lo contrario no es cierto: no siempre es fácil encontrar una explicación completa de los fenómenos eléctricos. En particular, no es fácil si tomamos como nuestro punto de partida la teoría de Fresnel; hacerlo así, sin duda, sería imposible. No obstante, debemos preguntarnos si estamos obligados a abandonar resultados admirables que pensábamos haber adquirido definitivamente. Eso parece constituir un paso hacia atrás, y muchos intelectos prudentes no permitirían esto de buena gana.

Si el lector consiente establecer algunos límites a estas esperanzas, se toparía con otras dificultades. El científico inglés no pretende erigir una construcción única, definitiva, y bien dispuesta; parece más bien levantar un gran número de construcciones provisionales e independientes, entre las cuales la comunicación es difícil y a veces imposible. Tomemos, por ejemplo, el capítulo en donde son explicadas las atracciones electrostáticas a partir de las presiones y tensiones del medio dieléctrico. Este capítulo podría ser eliminado sin que el resto del libro sea, de este modo, menos claro o menos completo, y aún así contiene una teoría que es autosuficiente, que puede ser comprendida sin leer una palabra de lo que precede o sigue. Pero no únicamente es independiente del resto del libro, sino que es difícil reconciliarlo con las ideas fundamentales del volumen. Maxwell ni siquiera intenta reconciliarla; simplemente dice: “No he sido capaz de dar el siguiente paso, a saber, tener en cuenta consideraciones mecánicas para estas tensiones en la dieléctrica”.

Este ejemplo resulta suficiente para demostrar lo que quiero decir; podría citar muchos más. De esta forma, ¿quién sospecharía, al leer las páginas dedicadas a la polarización magnética rotatoria, que hay una identidad entre los fenómenos ópticos y los magnéticos?

No debemos presumir que hemos evitado cualquier contradicción, pero sí debemos confeccionar nuestras mentes. Dos teorías contradictorias, siempre que no estén superpuestas, y que no queramos encontrar en ellas la explicación de las cosas, pueden, en realidad, ser instrumentos de investigación muy útiles; y quizá la lectura de Maxwell sería menos sugestiva si no nos hubiera abierto tantos caminos nuevos y divergentes. Pero la idea fundamental está enmascarada, por decirlo así. Hasta ahora este es el caso, que en la mayoría de los trabajos popularizados, esta idea es el único punto que permanece intacto. Para mostrar la importancia de esto, pienso que debo explicar en qué consiste esta idea fundamental; pero para tal propósito, es necesaria una pequeña digresión.

La explicación mecánica de los fenómenos físicos. En cada fenómeno físico hay un cierto número de parámetros, alcanzados directamente por el experimento, que pueden ser medidos. Los llamaré los parámetros *q*. Después, la observación nos enseña las leyes de las variaciones de estos parámetros, y estas leyes pueden generalmente ser establecidas en la forma de ecuaciones diferenciales que conectan los parámetros *q* y el tiempo. ¿Qué puede hacerse para dar una interpretación mecánica a tal fenómeno? Nos podemos esforzar por explicarlo, ya sea por los movimientos de la materia ordinaria, o por aquellos de uno o más fluidos hipotéticos. Estos fluidos serán considerados como formados por un gran número de *m* moléculas aisladas. ¿Cuándo podemos decir que tenemos una explicación mecánica completa del fenómeno? Será, por una parte, cuando conozcamos las ecuaciones diferenciales satisfechas por las coordenadas de estas hipotéticas moléculas *m*, ecuaciones que deben, además, ajustarse a las leyes de la dinámica; y, por otra parte, cuando conozcamos las relaciones que definen las coordenadas de las moléculas *m* como funciones de los parámetros *q*, alcanzables por el experimento. Estas ecuaciones, como he dicho, deben ser conformes con los principios de la dinámica y, en particular, con el principio de la conservación de la energía, y con el de acción mínima.

El primero de estos dos principios nos enseña que la energía total es constante, y puede ser dividida en dos partes:

(1) Energía cinética, o *vis viva*, que depende de las masas de las hipotéticas moléculas *m*, y de sus velocidades. A esta la llamaré *T*. (2) La energía potencial, que depende únicamente de las coordenadas de estas moléculas, y a esta la llamaré *U*. Es la suma de las energías *T* y *U* la que es constante.

Ahora bien, ¿qué nos enseña el principio de acción mínima? Nos enseña que para pasar de la posición inicial ocupada en el instante t_0 a la posición final ocupada en el instante t_1, el sistema debe describir un camino tal que, en el intervalo de tiempo entre el instante t_0 y t_1, el valor medio de la acción - esto es, la *diferencia* entre las dos energías *T* y *U* - debe ser tan pequeño como sea posible. El primero de estos dos principios es, por otra parte, una consecuencia del segundo. Si conocemos las funciones *T* y *U*, este segundo principio es suficiente para determinar las ecuaciones del movimiento.

De entre los caminos que nos permiten pasar de una posición a otra, claramente hay uno para el cual el valor medio de la acción es menor que para todos los otros. Además, sólo hay un camino tal; y se sigue de esto que el principio de acción mínima es suficiente para determinar el camino seguido y, por lo tanto, las ecuaciones del movimiento. De esta forma, se obtienen las llamadas ecuaciones de Lagrange. En estas ecuaciones, las variables independientes son las coordenadas de las hipotéticas moléculas *m*; pero ahora asumiré que tomamos, por las variables, los parámetros *q*, que son directamente accesibles al experimento.

Las dos partes de la energía deben entonces ser expresadas como funciones de los parámetros *q* y de sus derivadas. Es claro que es bajo esta forma como aparecerán ante el experimentador. Las últimas naturalmente tentarán al experimentador a definir la energía cinética y potencial con la ayuda de cantidades directamente observables.[‡‡] Si esto se concede, el sistema siempre procederá de una posición a otra por tal camino que el valor medio de la acción sea un mínimo. Importa poco que *T* y *U* estén ahora expresadas con la ayuda de los parámetros *q* y de sus derivadas; importa poco que sea también con la ayuda de estos parámetros que definimos las posiciones inicial y final: el principio de acción mínima siempre será cierto.

De nuevo aquí, de todos los caminos que conducen de una posición a otra, hay uno y sólo uno para el cual la acción media es un mínimo. El principio de acción

[‡‡] Podemos añadir que *U* dependerá únicamente de los parámetros *q*, que *T* dependerá de ellos y de sus derivadas con respecto al tiempo, y que será un polinomio homogéneo de segundo grado con respecto a estas derivadas.

mínima, por tanto, resulta suficiente para la determinación de las ecuaciones diferenciales que definen las variaciones de los parámetros q. Las ecuaciones así obtenidas son otra forma de las ecuaciones de Lagrange.

Para dar forma a estas ecuaciones, no necesitamos conocer las relaciones que conectan los parámetros q con las coordenadas de las hipotéticas moléculas, ni las masas de las moléculas, ni la expresión de U como una función de las coordenadas de estas moléculas. Todos lo que necesitamos conocer es la expresión de U como una función de los parámetros q, y la de T como una función de los parámetros q y sus derivadas, es decir, las expresiones de la energía cinética y potencial en términos de los datos experimentales.

Ahora debe suceder una de dos cosas. O bien para una elección conveniente de T y U las ecuaciones lagrangianas, construidas como hemos indicado, serán idénticas a las ecuaciones diferenciales deducidas del experimento, o no habrá funciones T y U en donde tenga lugar esta identidad. Si se da el último caso, es claro que no puede haber explicación mecánica posible. La condición *necesaria* para que una explicación mecánica sea posible es por tanto la siguiente: que podamos elegir las funciones T y U para que satisfagan el principio de acción mínima y el de la conservación de la energía. Además, esta condición es *suficiente*. Supongamos, en efecto, que hemos encontrado una función U de los parámetros q, que representa una de las partes de la energía, y que la parte de la energía representada por T es una función de los parámetros q y sus derivadas; que es un polinomio de segundo grado con respecto a sus derivadas y, finalmente, que las ecuaciones lagrangianas formadas con la ayuda de estas dos funciones T y U están en conformidad con los datos del experimento. ¿Cómo podemos deducir de esto una explicación mecánica? U debe ser considerada como la energía potencial de un sistema en el cual T es la energía cinética. No hay dificultad alguna en cuanto a U concierne, ¿pero puede T ser considerada como la *vis viva* del sistema material?

Es fácilmente demostrable que esto siempre es posible, y además en un número ilimitado de formas. Estaré contento con referir al lector a las páginas del prefacio de mi *Électricité et optique* para más detalles. Así, si el principio de acción mínima no puede ser satisfecho, no hay explicación mecánica posible. Si puede ser satisfecho, no solamente hay una explicación, sino un número ilimitado de ellas, de donde se sigue que, como hay una, debe haber un número ilimitado.

Una observación más. De entre las cantidades que pueden ser alcanzadas directamente por el experimento, debemos considerar algunas como las coordenadas de nuestras hipotéticas moléculas, algunas serán nuestros parámetros q, y el resto serán consideradas como dependientes no sólo de las coordenadas sino de las velocidades, o, lo que viene a ser lo mismo, las vemos como las derivadas de los parámetros q, o como combinaciones de estos parámetros y sus derivadas.

Surge entonces una cuestión: entre todas estas cantidades medidas experimentalmente, ¿cuáles debemos escoger para representar los parámetros q? ¿Y cuáles preferimos considerar como las derivadas de estos parámetros? Esta elección sigue siendo arbitraria en gran medida, pero una explicación mecánica será posible si es hecha para satisfacer el principio de acción mínima.

Después, Maxwell se pregunta: ¿Puede esta elección, y la de las dos energías T y U, ser hecha de tal forma que los fenómenos eléctricos satisfagan este principio? El experimento nos demuestra que la energía de un campo electromagnético se descompone en energía electrostática y electrodinámica. Maxwell reconoció que, si consideramos a la primera como la energía potencial U, y a la segunda como la energía cinética T, y que si, por una parte, tomamos las cargas electrostáticas de los conductores como los parámetros q, y a la intensidad de las corrientes como derivadas de otros parámetros q, bajo estas condiciones, los fenómenos eléctricos satisfacen el principio de acción mínima. Estaba, pues, seguro de una explicación mecánica. Si hubiera expuesto esta teoría al principio de su primer volumen, en lugar de relegarla a un rincón del segundo, no hubiera escapado a la atención de la mayoría de los lectores. Si, por consiguiente, un fenómeno permite una explicación mecánica completa, permite también un número ilimitado de otras, que igualmente tomarán en cuenta todos los particulares revelados por el experimento. Y esto está confirmado por la historia de cada rama de la física. En la óptica, por ejemplo, Fresnel creyó que la vibración era perpendicular al plano de polarización; Neumann sostiene que es paralela a tal plano. Por mucho tiempo, se buscó un *experimentum crucis* que nos permitiese decidir entre estas dos teorías, pero todo fue en vano. De la misma forma, sin salirnos del dominio de la electricidad, encontramos que la teoría de los dos fluidos y la teoría del único fluido consideran igualmente, de una manera satisfactoria, todas las leyes electrostáticas. Todos estos hechos son fácilmente explicados gracias a las propiedades de las ecuaciones de Lagrange.

Ahora es fácil comprender la idea fundamental de Maxwell. Para demostrar la posibilidad de una explicación mecánica de la electricidad, no tenemos que molestarnos en encontrar la explicación en sí misma; únicamente necesitamos conocer la expresión de las dos funciones T y U, que son las dos partes de la energía, y formar, con estas dos funciones, ecuaciones lagrangianas, y después comparar estas ecuaciones con las leyes experimentales.

¿Cómo debemos escoger, entre todas las explicaciones posibles, una en donde se quiera la ayuda del experimento? Probablemente llegue el día en que los físicos ya no se preocuparán por cuestiones inaccesibles a los métodos positivos, y dejarán tales a los metafísicos. Ese día aún no ha llegado, y el hombre no se resigna tan fácilmente a permanecer por siempre ignorante de las causas de las cosas. Nuestra elección, por tanto, ya no puede estar guiada por consideraciones en donde la apreciación personal desempeñe un papel tan grande. Existen, no obstante, soluciones que todos rechazan por su naturaleza fantástica, y otras que todos prefieren por su simplicidad. En cuanto al magnetismo y la electricidad concierne, Maxwell se abstuvo de hacer cualquier elección. No es que tenga un desprecio sistemático por todo lo que los métodos positivos no pueden alcanzar, como puede verse por el tiempo que ha dedicado a la teoría cinética de los gases. Puedo añadir que, si en su *magnum opus* no desarrolla una explicación completa, ha intentado una en un artículo en la *Philosophical Magazine*. La extrañeza y la complejidad de las hipótesis que se encuentra obligado a hacer lo condujeron, posteriormente, a abandonarlas.

El mismo espíritu se encuentra a lo largo de toda su obra. Pone de relieve lo esencial, es decir, lo que es común a todas las teorías: a todo lo que es adecuado sólo para una teoría en particular se le pasa por encima casi en silencio. El lector, por tanto, se encuentra ante la presencia de una forma casi desprovista de materia, que al principio está tentado a tomar como un fantasma fugitivo e inexpugnable. Pero los esfuerzos que de esta forma se ve obligado a hacer lo obligan a pensar, y, eventualmente, ve que hay algo más bien artificial en los “agregados” teóricos que alguna vez admiró.

CAPÍTULO XIII

ELECTRODINÁMICA

La historia de la electrodinámica es muy instructiva desde nuestro punto de vista. El título de la inmortal obra de Ampère es *Théorie des phénomènes electrodynamiques, uniquement fondée sur expérience*. Imaginó, por tanto, que no había hecho hipótesis alguna; pero, como no tardaremos mucho tiempo en reconocer, estaba equivocado. Lo que sucedió es que estaba inconsciente de estas hipótesis. Por otra parte, sus sucesores las ven claramente, porque su atención es atraída por los puntos débiles en la solución de Ampère. Realizaron nuevas hipótesis, pero esta vez deliberadamente. Cuántas veces tuvieron que cambiarlas antes de alcanzar el sistema clásico, que incluso ahora quizá no es definitivo, es lo que veremos ahora.

I. Teoría de Ampère. En su estudio experimental sobre la acción mutua de las corrientes, Ampère ha operado con corrientes cerradas (y solamente podía operar con tales). Esto no se debió a que negara la existencia o posibilidad de las corrientes abiertas. Si dos conductores están positiva y negativamente cargados y son comunicados por un cable, se establece una corriente que pasa de uno a otro conductor hasta que los dos potenciales sean iguales. De acuerdo con las ideas del tiempo de Ampère, a esto se consideraba una corriente abierta; se sabía que la corriente pasaba del primer conductor al segundo, pero se ignoraba si regresaba del segundo al primero. Todas las corrientes de este tipo eran considerada por Ampère, en consecuencia, como corrientes abiertas (por ejemplo, las corrientes de descarga de un condensador: fue incapaz de experimentar con ellas debido a su corta duración). Puede ser imaginado otro tipo de corriente abierta. Supongamos que tenemos dos conductores *A* y *B* conectados por un cable *AMB*. Pequeñas masas conductoras en movimiento son, antes que nada, puestas en contacto con el conductor *B*, reciben una carga eléctrica, y al dejar *B* son puestas en movimiento a lo largo de un camino *BNA*, llevando su carga consigo. Al entrar en contacto con *A* pierden su carga, que entonces regresa a *B* a lo largo del cable *AMB*. Aquí tenemos, en un sentido, un circuito cerrado, debido a que la electricidad describe el circuito cerrado *BNAMB*; pero las dos partes de la corriente son muy diferentes. En el cable *AMB*, la electricidad es desplazada *a través de* un conductor fijo como una corriente voltaica, superando una resistencia óhmica, y desarrollando calor; decimos que es desplazada por *conducción*. En la parte *BNA*, la electricidad es *transportada* por un conductor en movimiento, y se dice que es desplazada por *convección*. Si, por tanto, se considera a la corriente de convección como perfectamente análoga a la corriente de conducción, el circuito *BNAMB* es cerrado; si, por el contrario, la corriente de convección no es una “verdadera corriente”, y si, por ejemplo, no actúa sobre el imán, entonces sólo hay una corriente de conducción *AMB*, que es *abierta*. Por ejemplo, si conectamos, por un cable, los polos de una máquina de Holtz, el disco giratorio cargado transfiere la electricidad por convección de un polo a otro, y regresa al primer polo por conducción a través del cable. Pero corrientes de este tipo son muy difíciles de producir con una intensidad apreciable; en realidad, con los medios a disposición de Ampère, casi podemos decir que era imposible.

Para resumir, digamos que Ampère pudo concebir la existencia de dos tipos de corrientes abiertas, pero no pudo experimentar sobre ninguna, porque no eran lo suficientemente fuertes, o porque su duración era muy corta. El experimento, por tanto, sólo pudo mostrarle la acción de una corriente cerrada sobre una corriente cerrada o, más exactamente, la acción de una corriente cerrada sobre una porción de corriente, porque una corriente puede ser dispuesta para describir un circuito *cerrado*, en donde una parte pueda estar en movimiento y la otra ser fija. Los desplazamientos de la parte en movimiento pueden estudiarse bajo la acción de otra corriente cerrada. Por otra parte, Ampère careció de medios para estudiar la acción de una corriente abierta bien sobre una corriente cerrada, o bien sobre otra abierta.

1. EL CASO DE LAS CORRIENTES CERRADAS. En el caso de la acción mutua de dos corrientes cerradas, el experimento reveló a Ampère leyes extraordinariamente simples. Lo siguiente será útil para nosotros en la secuela:

1. *Si la intensidad de las corrientes se mantiene constante*, y si los dos circuitos, después de haber sido objeto de cualesquiera desplazamientos y deformaciones, regresan finalmente a sus posiciones iniciales, el trabajo total realizado por las acciones electrodinámicas será cero. En otras palabras, hay un *potencial electrodinámico* de los dos circuitos proporcional al producto de sus intensidades, y dependiente de la forma y de las posiciones relativas de los circuitos; el trabajo hecho por las acciones electrodinámicas es igual al cambio de este potencial.

2. La acción de un solenoide cerrado es cero.

3. La acción de un circuito *C* sobre otro circuito voltaico *C’* depende únicamente del “campo magnético” desarrollado por el circuito *C*. En cada punto en el espacio podemos, en realidad, definir - en magnitud y dirección - una cierta fuerza llamada “fuerza magnética”, que posee las siguientes propiedades:

(a) La fuerza ejercida por *C* sobre un polo magnético es aplicada a tal polo, y es igual a la fuerza magnética multiplicada por la masa magnética del polo.

(b) Una aguja magnética muy pequeña tiende a tomar la dirección de la fuerza magnética, y el par al que tiende a reducir es proporcional al producto de la fuerza magnética, al momento magnético de la aguja, y al seno de la inclinación de la aguja.

(c) Si el circuito *C’* es desplazado, la cantidad de trabajo hecha por la acción electrodinámica de *C* sobre *C’* será igual al incremento del “flujo de fuerza magnética” que pasa a través del circuito.

2. ACCIÓN DE UNA CORRIENTE CERRADA SOBRE UNA PORCIÓN DE CORRIENTE. Ampère, al ser incapaz de producir una corriente abierta propiamente dicha, sólo tuvo una forma de estudiar la acción de una corriente cerrada sobre una porción de corriente. Esto fue al operar sobre un circuito *C* compuesto de dos partes, una movible y otra fija. La parte movible fue, por ejemplo, un cable movible αβ, cuyos extremos α y β pudieran deslizarse a lo largo de un cable fijo. En una de las posiciones del cable movible, el extremo α descansaba sobre el punto *A*, y el extremo β sobre el punto *B* del cable fijo. La corriente corría de α a β - es decir, de *A* a *B* a lo largo del cable movible -, y después de *B* a *A* a lo largo del cable fijo. *Esta corriente era, por tanto, cerrada.*

En la segunda posición, habiendo deslizado el cable movible, los puntos α y β estaban, respectivamente, en *A’* y *B’* sobre el cable fijo. La corriente corría de α a β - es decir, de *A’* a *B’* sobre el cable movible - y regresaba de *B’* a *B*, y después de *B* a *A*, y después de *A* a *A’*, todo sobre el cable fijo. Esta corriente también era cerrada. Si un circuito similar es expuesto a la acción de una corriente cerrada *C*, la parte movible será desplazada tal como si estuviera actuando sobre ella una fuerza. Ampère *admite* que la fuerza, aparentemente actuando sobre la parte movible *AB*, y representando la acción de *C* sobre la porción αβ de la corriente, se mantiene igual ya sea que una corriente abierta corra a través de αβ, deteniéndose en α y β, o que una corriente cerrada corra primero a β, y luego regrese a α a través de la porción fija del circuito. Esta hipótesis parecía lo suficientemente natural, y Ampère inocentemente la asumió; no obstante la hipótesis *no* *es una necesidad*, porque en su momento veremos que Helmholtz la rechazó. Sea como fuere, permitió a Ampère, aunque nunca produjo una corriente abierta, establecer las leyes de la acción de una corriente cerrada sobre una corriente abierta, o incluso sobre un elemento de corriente. Y tales leyes son muy simples:

1. La fuerza actuando sobre un elemento de corriente es aplicada a tal elemento; es normal al elemento y a la fuerza magnética, y proporcional a aquel componente de la fuerza magnética que es normal al elemento.

2. La acción de un solenoide cerrado sobre un elemento de corriente es cero. Pero el potencial electrodinámico ha desaparecido - es decir, cuando una corriente cerrada y una corriente abierta de intensidades constantes regresan a sus posiciones iniciales -, y el trabajo total realizado no es cero.

3. ROTACIONES CONTINUAS. Los experimentos electrodinámicos más notables son aquellos en donde son producidas rotaciones continuas, y son llamados experimentos de *inducción unipolar*. Un imán puede girar alrededor de su eje; una corriente pasa primero a través de un cable fijo y después entra al imán por el polo *N*, por ejemplo, pasa a través de la mitad del imán, emerge por un contacto deslizante, y vuelve a entrar al cable fijo. El imán empieza entonces a rotar de manera continua. Este es el experimento de Faraday. ¿Cómo es posible? Si fuese una cuestión de dos circuitos de forma invariable, *C* fijo y *C'* movible sobre un eje, el último nunca tomaría una posición de rotación continua: de hecho, hay un potencial electrodinámico; debe haber, por tanto, una posición de equilibrio cuando el potencial sea un máximo. En consecuencia, las rotaciones continuas sólo son posibles cuando el circuito *C'* esté compuesto de dos partes - una fija y otra movible sobre un eje - como en el caso del experimento de Faraday. Aquí, de nuevo, es conveniente trazar una distinción. El paso de la parte fija a la movible, o *viceversa*, puede tener lugar ya sea por un contacto simple, en donde el mismo punto de la parte movible se mantiene constantemente en contacto con el mismo punto de la parte fija, o por un contacto deslizante, en donde el mismo punto de la parte movible entra en contacto de manera sucesiva con los distintos puntos de la parte fija.

Solamente en el segundo caso puede haber rotación continua. Esto es lo que entonces sucede: el sistema tiende a tomar una posición de equilibrio; pero, cuando en el punto de alcanzar tal posición, el contacto deslizante pone la parte movible en contacto con un punto nuevo en la parte fija, hace cambiar las conexiones y, por lo tanto, las condiciones de equilibrio, de tal suerte que la posición de equilibrio siempre está eludiendo, por decirlo de alguna manera, al sistema que intenta alcanzarla, y la rotación puede tener lugar indefinidamente.

Ampère admite que la acción del circuito sobre la parte movible de *C’* es la misma a como si la parte fija de *C’* no existiese y, por tanto, como si la corriente pasando a través de la parte movible fuese una corriente abierta. Concluyó que la acción de un circuito cerrado sobre uno abierto o, *viceversa*, de un circuito abierto sobre uno cerrado, puede dar lugar a una rotación continua. Pero esta conclusión depende de la hipótesis que he anunciado y a la que, como he dicho, Helmholtz se negó a suscribir.

4. ACCIÓN MUTUA DE DOS CORRIENTES ABIERTAS. En cuanto a la acción mutua de dos corrientes abiertas, y en particular de dos elementos de corriente concierne, todo experimento fracasa, y Ampère recurre a la hipótesis. Asume: (1) que la acción mutua de dos elementos se reduce a una fuerza actuando a lo largo de su *unión*; (2) que la acción de dos corrientes cerradas es el resultante de las acciones mutuas de sus distintos elementos, que son los mismos como si estos elementos estuviesen asilados.

Lo notable de nuevo aquí es que Ampère hace dos hipótesis sin estar consciente de ellas. Sea como fuere, estas dos hipótesis, junto con los experimentos sobre corrientes cerradas, son suficientes para determinar completamente la ley de acción mutua de dos elementos. Pero entonces, la mayoría de las simples leyes que nos hemos encontrado en el caso de las corrientes cerradas ya no son ciertas. En primer lugar, ya no hay potencial electrodinámico; ni había tampoco alguno, como hemos visto, en el caso de una corriente cerrada actuando sobre una corriente abierta. Después, no hay, propiamente hablando, fuerza magnética alguna; y arriba hemos definido esta fuerza en tres formas distintas: (1) Por la acción sobre un polo magnético; (2) por el par director que orienta la aguja magnética; (3) por la acción sobre un elemento de corriente.

En este caso que nos concierne inmediatamente, no sólo no están estas tres definiciones en armonía, sino que, individualmente, han perdido su significado.

1. Sobre un polo magnético ya no actúa una única fuerza aplicada a tal polo. Hemos visto, de hecho, que la acción de un elemento de corriente sobre un polo no es aplicada al polo sino al elemento; puede ser, por otra parte, remplazada por una fuerza aplicada al polo y por un par.

2. El par que actúa sobre la aguja magnética ya no es más un simple par director, porque su momento con respecto al eje de la aguja no es cero. Se descompone en un par

director, propiamente dicho, y en un par suplementario que tiende a producir la rotación continua de la que hemos hablado antes.

3. Finalmente, la fuerza actuando sobre un elemento de una corriente no es normal a tal elemento. En otras palabras, *la unidad de la fuerza magnética ha desaparecido*.

Veamos en qué consiste esta unidad. Dos sistemas que ejercen la misma acción sobre un polo magnético también ejercerán la misma acción sobre una aguja magnética indefinidamente pequeña, o sobre un elemento de corriente puesto en el punto en el espacio en donde se encuentra el polo. Pues bien, esto es cierto si los dos sistemas únicamente contienen corrientes cerradas y, de acuerdo con Ampère, no será cierto si los sistemas contienen corrientes abiertas. Es suficiente con hacer notar, por ejemplo, que si un polo magnético es puesto en *A* y un elemento en *B*, producida la dirección del elemento estando en *AB*, este elemento, que no ejercerá acción alguna sobre el polo, ejercerá una acción bien sobre una aguja magnética puesta en *A*, o bien sobre un elemento de corriente en *A*.

5. INDUCCIÓN. Sabemos que el descubrimiento de la inducción electrodinámica surgió no mucho después de la inmortal obra de Ampère. En cuanto sea únicamente una cuestión de corrientes cerradas, no hay ninguna dificultad, e incluso Helmholtz ha señalado que el principio de la conservación de la energía es suficiente para deducir las leyes de inducción a partir de las leyes electrodinámicas de Ampère. Pero esto bajo la condición, como ha demostrado Bertrand, de que hagamos un cierto número de hipótesis.

El mismo principio también nos permite hacer esta deducción en el caso de las corrientes abiertas, aunque el resultado no pueda ser probado por el experimento, porque tales corrientes no pueden ser producidas.

Si deseamos comparar este método de análisis con el teorema de Ampère sobre corrientes abiertas, obtenemos resultados que parecen estar calculados para sorprendernos. En primer lugar, la inducción no puede deducirse de la variación del campo magnético por la bien conocida ley de los científicos y de los hombres prácticos; en realidad, como he dicho, y propiamente hablando, no hay campo magnético. Pero además, si un circuito *C* se somete a la inducción de un sistema voltaico variable *S*, y si este sistema *S* es desplazado y deformado en cualquier forma, de manera que la intensidad de las corrientes de este sistema varía de acuerdo con cualquier ley, entonces, siempre que después de estas variaciones el sistema eventualmente regrese a su posición inicial, parece natural suponer que la fuerza electromotriz *media* inducida en la corriente *C* es cero. Esto es cierto si el circuito *C* es cerrado, y si el sistema *S* únicamente contiene corrientes cerradas. Ya no es cierto si aceptamos la teoría de Ampère, porque habría corrientes abiertas. De tal forma que no sólo la inducción ya no sería la variación del flujo de fuerza magnética en cualquiera de los sentidos usuales de la palabra, sino que tampoco puede ser representada por la variación de tal fuerza cualquiera sea ésta.

II. La teoría de Helmholtz. Me he detenido en las consecuencias de la teoría de Ampère y en su método de explicar la acción de corrientes abiertas. Es difícil pasar por alto el carácter paradójico y artificial de las proposiciones a las que de esta forma llegamos. Nos sentimos obligados a pensar: “esto no puede ser así”. Podemos entonces imaginar que Helmholtz ha sido llevado a buscar algo más. Helmholtz rechaza la hipótesis fundamental de Ampère, a saber, que la acción mutua de dos elementos de corriente se reduce a una fuerza a lo largo de su unión. Admite que un elemento de corriente no está sometido a una única fuerza sino a una fuerza y a un par, y esto fue lo que dio lugar a la célebre polémica entre Bertrand y Helmholtz. Helmholtz reemplaza la hipótesis de Ampère por la siguiente: dos elementos de corriente siempre admiten un potencial electrodinámico, dependiente únicamente de su posición y orientación[§§]; y el trabajo de las fuerzas que ejercen uno sobre el otro es igual a la variación de este potencial. Así, Helmholtz no puede hacer una definición sin más hipótesis que Ampère, pero por lo menos no lo hace sin anunciarla explícitamente. En el caso de las corrientes cerradas, que por sí mismas son sujetas a experimentos, ambas teorías concuerdan; en todos los demás casos, difieren. En primer lugar, contrario a lo que supuso Ampère, la fuerza que parece actuar sobre la porción movible de una corriente cerrada no es la misma que la que actúa sobre la porción movible si ésta estuviese aislada y constituyese una corriente abierta. Regresemos al circuito *C*, del que ya hablamos antes, y el cual estaba formado por un cable movible corredizo sobre un cable fijo. En el único experimento que puede hacerse, la porción movible αβ no está aislada, sino es parte de un circuito cerrado. Cuando pasa de *AB* a *A’B’*, el potencial electrodinámico total varía por dos razones. Primero, tiene un pequeño incremento porque el potencial de *A’B’* con respecto al circuito *C* no es el mismo que el de *AB*; segundo, tiene un segundo incremento porque

[§§] Esto es, de la posición y orientación de los dos elementos de corriente. Nota del Traductor.

debe incrementarse por los potenciales de los elementos *AA’* y *B’B* con respecto a *C*. Es este *doble* incremento el que representa el trabajo de la fuerza actuante sobre la porción *AB*. Si, por el contario, αβ se encuentra aislada, el potencial sólo tendría el primer incremento, y este primer incremento - por sí mismo - mediría el trabajo de la fuerza actuando sobre *AB*. En segundo lugar, no podría haber rotación continua sin contacto deslizante alguno, y, en realidad eso, como hemos visto en el caso de las corrientes cerradas, es una consecuencia inmediata de la existencia de un potencial electrodinámico. En el experimento de Faraday, si el imán está fijado, y si la parte de la corriente externa al imán corre a lo largo de un cable movible, tal cable movible puede experimentar una rotación continua. Pero no significa que, si los contactos del cable con el imán fuesen suprimidos, y una corriente abierta corriese a lo largo del cable, el cable todavía tendría un movimiento de rotación continua. Lo que he dicho, en realidad, es que un elemento aislado no se halla sometido de la misma manera que un elemento movible que es parte de un circuito cerrado. Pero hay otra diferencia. La acción de un solenoide sobre una corriente cerrada es cero de acuerdo con el experimento y de acuerdo con las dos teorías. Su acción sobre una corriente abierta sería cero de acuerdo con Ampère, y no sería cero de acuerdo con Helmholtz. De esto sigue una consecuencia importante. Arriba hemos dado tres definiciones de fuerza magnética. La tercera no tiene sentido aquí, debido a que un elemento de corriente ya no se halla sometido por una única fuerza. Ni la primera tiene sentido. ¿Qué es, en realizad, un polo magnético? Es la extremidad de un imán lineal indefinido. Este imán puede ser reemplazado por un solenoide indefinido. Para que la definición de fuerza magnética tenga algún sentido, la acción ejercida por una corriente abierta sobre un solenoide indefinido únicamente debe depender de la posición de la extremidad de tal solenoide, esto es, que la acción de un solenoide cerrado sea cero. Ahora hemos visto que este no es el caso. Por otra parte, no hay nada que nos prevenga adoptar la segunda definición, basada en la medición del par director que tiende a orientar la aguja magnética; pero, si es adoptada, ni los efectos de la inducción, ni los efectos electrodinámicos, dependerán únicamente de la distribución de las líneas de fuerza en este campo magnético.

III. Dificultades surgidas por estas teorías. La teoría de Helmholtz constituye un avance con respecto a la de Ampère; es necesario, no obstante, que toda dificultad sea eliminada. En ambas, el nombre “campo magnético” carece de significado o, si le damos uno a partir de una convención más o menos artificial, las leyes ordinarias tan familiares a los electricistas ya no aplicarían; y es así que la fuerza electromotriz inducida en un cable ya no es medida por el número de líneas de fuerza reunidas por tal cable. Y nuestras objeciones no proceden solamente del hecho de que es difícil renunciar a hábitos profundamente arraigados del lenguaje y del pensamiento. Hay algo más. Si no creemos en acciones a una distancia, los fenómenos electrodinámicos deben explicarse por una modificación del medio. Y este medio es precisamente lo que llamamos "campo magnético", y entonces los efectos electromagnéticos únicamente dependerían de tal campo. Todas estas dificultades surgen de la hipótesis de corrientes abiertas.

IV. La teoría de Maxwell. Tales fueron las dificultades surgidas por las teorías sobre las corrientes, cuando Maxwell - de un plumazo - las hizo desaparecer. Para su mente, en realidad, todas las corrientes son corrientes cerradas. Maxwell admite que si en un dieléctrico varía el campo eléctrico, este dieléctrico se convierte en la sede de un fenómeno particular actuando sobre el galvanómetro como una corriente y llamado la *corriente de desplazamiento*. Si, entonces, dos conductores con cargas positiva y negativa son conectados por medio de un cable, durante la descarga hay una corriente abierta de conducción en tal cable; pero se producen - al mismo tiempo en el dieléctrico circundante - corrientes de desplazamiento que cierran esta corriente de conducción. Sabemos que la teoría de Maxwell conduce a la explicación de los fenómenos ópticos, que se deberían a oscilaciones eléctricas extremadamente rápidas. En ese periodo, tal concepción era solamente una hipótesis atrevida, que no contaba con el apoyo de experimento alguno; pero después de veinte años, las ideas de Maxwell fueron confirmadas por el experimento. Hertz tuvo éxito en producir sistemas de oscilaciones eléctricas que reproducen todas las propiedades de la luz, y únicamente difieren en la longitud de su onda (es decir, tal como el violeta difiere del rojo). En cierta medida, hizo una síntesis de la luz. Podría decirse que Hertz no ha probado directamente la idea fundamental de Maxwell de la acción de la corriente de desplazamiento sobre el galvanómetro. Eso es cierto en un sentido. Lo que ha mostrado directamente es que la inducción electromagnética no se propaga instantáneamente, como suponíamos, sino que su velocidad es la velocidad de la luz. A pesar de todo, suponer que no hay corriente de desplazamiento, y que la inducción es con la velocidad de la luz; o, más bien, suponer que las corrientes de desplazamiento producen efectos inductivos, y que la inducción tiene lugar instantáneamente, *viene a ser la misma cosa*. Esto no puede observarse a primera vista, pero está probado por un análisis del cual no pienso siquiera ofrecer un resumen aquí.

V. El experimento de Rowland. Pero, como he dicho arriba, hay dos tipos de corrientes de conducción abierta. Primero hay las corrientes de descarga de un condensador, o de cualquier conductor. También hay casos en donde las cargas eléctricas describen un contorno cerrado, siendo desplazado por conducción en una parte del circuito, y por convección en la otra parte. La cuestión puede ser considerada como resuelta para las corrientes abiertas del primer tipo; estaban cerradas por corrientes de desplazamiento. Para corrientes abiertas del segundo tipo, la solución parecía incluso más simple.

Parecía que si la corriente estaba cerrada únicamente podía ser por la corriente de convección por sí misma. Para tal propósito, resultaba suficiente admitir que una "corriente de convección" - es decir, un conductor cargado en movimiento - podía actuar sobre el galvanómetro. Pero faltaba la confirmación experimental. Parecía difícil, de hecho, obtener una intensidad suficiente incluso al incrementar - tanto como sea posible - la carga y la velocidad de los conductores. Rowland, un experimentador extremadamente habilidoso, fue el primero en triunfar, o en parecer triunfar, sobre estas dificultades. Un disco recibía una fuerte carga electrostática y una velocidad de rotación muy alta. Un sistema magnético astático puesto junto al disco experimentaba desviaciones. El experimento fue hecho dos veces por Rowland, una vez en Berlín y otra en Baltimore. Más tarde fue repetido por Himstedt. Estos físicos incluso creyeron poder anunciar haber tenido éxito en hacer mediciones cuantitativas. Por veinte años, la ley de Rowland fue admitida sin objeción alguna por todos los físicos y, en realidad, todo parecía confirmarla. La chispa ciertamente produce un efecto magnético, ¿y no parece muy verosímil que la chispa descargada se deba a partículas tomadas de uno de los electrodos y transferidas al otro electrodo con su carga?[***] ¿No es el mismo espectro de la chispa, en donde reconocemos las líneas del metal del electrodo, una prueba de ello? La chispa sería entonces una corriente de inducción real.

Por otra parte, también se admite que en un electrólito la electricidad es transportada por los iones en movimiento. La corriente en un electrólito sería, por tanto, también una corriente de convección; pero actúa sobre la aguja magnética. Y lo mismo para los rayos catódicos; Crookes atribuía estos rayos a materia muy sutil cargada con

[***] Es decir, con la carga de las partículas. Nota del Traductor.

electricidad negativa y moviéndose a una velocidad muy alta. Los veía, en otras palabras, como corrientes de convección. Ahora bien, estos rayos catódicos son desviados por el imán. En virtud del principio de acción y reacción, deberían, a su vez, desviar la aguja magnética. Es verdad que Hertz creyó haber probado que los rayos catódicos no transportan electricidad negativa, y que no actúan sobre la aguja magnética; pero Hertz estaba equivocado. Antes que nada, Perrin logró colectar la electricidad transportada por estos rayos - electricidad cuya existencia negó Hertz -; el científico alemán parece haber sido engañado por los efectos debidos a la acción de los rayos X, que aún no habían sido descubiertos. Más tarde, y muy recientemente, ha salido a la luz la acción de los rayos catódicos sobre la aguja magnética. Así, todos estos fenómenos, vistos como corrientes de convección, chispas eléctricas, corrientes electrolíticas, rayos catódicos, actúan de la misma forma sobre el galvanómetro y en conformidad con la ley de Rowland.

VI. La teoría de Lorentz. No necesitamos ir mucho más allá. De acuerdo con la teoría de Lorentz, las corrientes de conducción serían por sí mismas verdaderas corrientes de convección. La electricidad permanecería indisolublemente conectada con ciertas partículas materiales llamadas *electrones*. La circulación de estos electrones a través de los cuerpos produciría corrientes voltaicas, y lo que distinguiría a los conductores de los aisladores sería que los primeros pueden ser recorridos por estos electrones, mientras que los segundos controlarían el movimiento de los electrones. La teoría de Lorentz es muy atractiva. Da una explicación muy simple de ciertos fenómenos que las teorías anteriores - incluso la de Maxwell en su forma primitiva - sólo podían tratar de una manera insatisfactoria; por ejemplo, la aberración de la luz, el impulso parcial de ondas luminosas, la polarización magnética, y el experimento de Zeeman.

Todavía quedaban unas pocas objeciones. Los fenómenos de un sistema eléctrico parecían depender de la velocidad absoluta de traslación del centro de gravedad de este sistema, lo que es contrario a la idea que tenemos de la relatividad del espacio. Apoyado por el señor Crémieu, el señor Lippman ha presentado esta objeción en una forma muy sorprendente. Imaginemos dos conductores cargados con la misma velocidad de traslación. Se encuentran relativamente en reposo. Sin embargo, al ser cada uno de ellos equivalente a una corriente de convección, deben atraerse uno al otro, y al medir esta atracción podríamos medir su velocidad absoluta. "¡No!", respondieron los partidarios de Lorentz. "Lo que podríamos medir de esa forma no es su velocidad absoluta, sino su velocidad relativa *con respecto al éter*, de manera que el principio de relatividad está a salvo”. Sea lo que fuere que pueda haber en estas objeciones, el edificio de la electrodinámica parecía estar, en todo caso en líneas generales, construido definitivamente. Todo fue presentado bajo el aspecto más satisfactorio. Las teorías de Ampère y Helmholtz, hechas para las corrientes abiertas que ya no existían, parecían no tener otra cosa que un interés puramente histórico, y las inextricables complicaciones a las que condujeron estas teorías han sido casi olvidadas. Esta quietud ha sido recientemente perturbada por los experimentos del señor Crémieu, que han contradicho, o por lo menos han parecido contradecir, los resultados formalmente obtenidos por Rowland. Numerosos investigadores se han empeñado en resolver la cuestión, y se han llevado a cabo nuevos experimentos. ¿Qué resultados darán? Tendré cuidado en no hacer una profecía que puede ser falsificada entre el día en que este libro esté listo para la imprenta y el día en que sea puesto ante el público.