# Lógica matemática

Por

Frank Ramsey

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE

Título original: Mathematical Logic



Publicado por Martino Publishing, CT, EEUU, 2013. Martino Publishing ha otorgado a esta colección los derechos de traducción y de publicación.

Se me ha pedido hablar[1] sobre los desarrollos en la lógica matemática desde la publicación de *Principia Mathematica*, y creo que sería más interesante si, en lugar de describir a detalle varias mejoras determinadas, discutiese resumidamente el trabajo que se ha hecho sobre líneas completamente distintas, y que clama reemplazar por completo la posición adoptada por Whitehead y Russell en cuanto a la naturaleza de las matemáticas y sus fundamentos lógicos.

Permítanme comenzar por recordar cuál es la perspectiva de Whitehead y Russell: es que las matemáticas son parte de la lógica formal, que todas las ideas de las matemáticas puras pueden definirse en términos que no son distintivamente matemáticos, sino que están involucrados en el complicado pensamiento de cualquier descripción, y que todas las proposiciones de las matemáticas pueden deducirse de proposiciones de la lógica formal, tales como que si $p$ es verdadera, entonces o $p$ o $q$ es verdadera. Esta perspectiva me parece plausible en sí misma, pues tan pronto como la lógica se ha desarrollado más allá de su antiguo núcleo silogístico, esperamos tener, además de las formas "Todos los hombres son mortales", "Algunos hombres son mortales", las formas numéricas "Dos hombres son mortales" y "Tres hombres son mortales", y el número tendrá que ser incluido en la lógica formal.

Frege fue el primero en sostener que las matemáticas eran parte de la lógica, y en construir una detallada teoría sobre esa base. Pero tropezó con las célebres contradicciones de la teoría de agregados, y parecía que desde sus proposiciones primitivas podían deducirse consecuencias contradictorias. Whitehead y Russell escaparon de este destino al introducir su Teoría de Tipos, de la cual aquí es imposible ofrecer una exposición adecuada. Pero debe explicarse una de sus implicaciones si han de ser inteligibles desarrollos posteriores.

Supóngase que tenemos un conjunto de características dadas como todas las características de un cierto tipo, digamos *A*; entonces sobre cualquier cosa podemos preguntar si tiene una característica del tipo *A*. Si la tiene, esto será otra característica de ella, y surge la cuestión de si esta característica, la característica de tener una característica

[1] Este trabajo lo leyó Ramsey ante la Asociación Británica, Sección A, Oxford, en agosto de 1926. Nota del Traductor.

del tipo *A*, puede ella misma ser del tipo *A*, en vista de que presupone la totalidad de tales características. La Teoría de Tipos sostuvo que no podía, y que sólo podíamos escapar de la contradicción al decir era una característica de orden superior, y no podía estar incluida en ningún enunciado sobre todas las características de orden inferior. Y, más generalmente, que cualquier enunciado acerca de todas las características debe considerarse como significando todas las de un cierto orden. Esto parecía plausible en sí mismo, y también la única manera de evitar ciertas contradicciones que surgían por confundir estos órdenes de características. Whitehead y Russell también sostienen que los enunciados sobre clases o agregados realmente han de considerarse como acerca de las características que definen las clases (una clase estando siempre dada como la clase de cosas poseyendo un cierto carácter), de modo que cualquier enunciado sobre todas las clases realmente será sobre todas las características, y estará sujeto a las mismas dificultades con respecto al orden de estas características.

Tal teoría nos permite evitar fácilmente las contradicciones de la Teoría de Agregados, pero también tiene la desafortunada consecuencia de invalidar un ordinario e importante tipo de argumento matemático, el tipo de argumento por el cual en última instancia establecemos la existencia del límite superior de un agregado, o la existencia del límite de una secuencia monótona limitada. Es habitual deducir estas proposiciones del principio de sección dedekindiana de que si los números reales son divididos completamente en una clase superior y una inferior, debe haber un número que divide que es o bien el menor de la clase superior o bien el mayor de la inferior. Esto se prueba, a su vez, al considerar a los números reales como secciones de racionales; las secciones de racionales son un tipo particular de clases de racionales, y por tanto un enunciado acerca de los números reales será un enunciado sobre un tipo de clases de racionales, esto es, sobre un tipo de características de racionales, y las características en cuestión tendrán que estar limitadas para ser de un cierto orden.

Ahora supóngase que tenemos un agregado *E* de números reales; eso será una clase de características de racionales. $\xi$, el límite superior de *E*, está definido como una sección de racionales que es la suma de los miembros de *E*; i. e., $\xi$ es una sección cuyos miembros son todos aquellos racionales que son miembros de cualquier miembro de *E*, esto es, todos aquellos racionales que tienen la característica de tener cualquiera de las características que dan los miembros de *E*. Así que el límite superior $\xi$ es una sección cuya característica definitoria es una de orden superior que aquellas de los miembros de *E*. Por lo tanto, si todos los números reales significa todas las secciones de racionales definidas por características de un cierto orden, el límite superior será, en general, una sección de racionales definida por una característica de orden superior, y no será un número real. Esto significa que el análisis como se entiende habitualmente está basado por completo en un tipo falaz de argumento, que cuando se aplica en otros campos lleva a resultados auto-contradictorios.

Whitehead y Russell intentaron eludir esta desafortunada consecuencia de la Teoría de Tipos al introducir el axioma de reducibilidad, que afirmaba que para cualquier característica de orden superior había una característica equivalente del orden inferior – equivalente en el sentido de que cualquier cosa que tenga la una tiene la otra, de modo que definen la misma clase. El límite superior, que vimos que era una clase de racionales definida por una característica de orden superior, también estaría entonces definido por la característica equivalente de orden inferior, y sería un número real. Desafortunadamente, el axioma no es auto-evidente, y no hay ninguna razón para suponer que es verdadero. Si fuese verdadero esto sólo sería, por así decirlo, un feliz accidente, y no sería una verdad lógica como las otras proposiciones primitivas.

En la segunda edición de *Principia Mathematica*, de la cual se publicó el primer volumen el último año, el Sr. Russell ha mostrado cómo la inducción matemática, para la que también parece requerirse el axioma de reducibilidad, puede establecerse sin él, pero no mantiene ninguna esperanza de un éxito similar con la teoría de números reales, para la que no está disponible el ingenioso método utilizado para los números enteros. Así, el asunto queda en una condición profundamente insatisfactoria.

Esto fue señalado por Weyl, quien en 1918 publicó un pequeño libro titulado *Das Kontinuum* en el que rechazaba el axioma de reducibilidad y aceptaba la consecuencia de que el análisis ordinario estaba mal. Mostró, no obstante, que varios teoremas, como el principio general de convergencia de Cauchy, todavía podrían ser probados.

Desde entonces Weyl ha cambiado de opinión y se ha vuelto un seguidor de Brouwer, el líder de la llamada escuela intuicionista, cuya principal doctrina es la negación de la ley del tercero excluido, que cada proposición es verdadera o falsa.[2] Aparentemente, esto se niega porque se piensa que es imposible conocer tal cosa *a priori*, e igualmente imposible conocerla por la experiencia, porque si no sabemos que es verdadera o que es falsa no podemos verificar que es verdadera o falsa. Brouwer se negaría a aceptar que o bien estaba lloviendo o no estaba lloviendo, a menos que haya ido a ver. Aunque ciertamente es difícil ofrecer una explicación filosófica de nuestro conocimiento de las leyes de la lógica, no puedo persuadirme de que no sé con certeza que la ley del tercero excluido es verdadera; desde luego, no puede probarse, aunque Aristóteles dio a su favor el siguiente argumento ingenioso. Si una proposición no es verdadera ni falsa, llamémosla dudosa; pero entonces, si la ley del tercero excluido fuera falsa, no necesita ser dudosa o no dudosa, así que tendremos no meramente tres posibilidades sino cuatro, que es verdadera, que es falsa, que es dudosa, y que no es verdadera, falsa, ni dudosa. Y así *ad infinitum*.

Pero si se responde "¿por qué no?", claramente no hay nada más que decir, y no veo cómo pueda encontrarse alguna base común desde la cual discutir el asunto. Los casos en los que Brouwer piensa que la ley del tercero excluido es falsa son aquellos en los que, como diría yo, no podríamos decir si la proposición era verdadera o falsa; por ejemplo, ¿es $2^{\sqrt{2}}$ racional o irracional? No podemos decirlo, pero Brouwer diría que no era ninguna. No podemos encontrar enteros *m*, *n* de modo que $\frac{m}{n} = 2^{\sqrt{2}}$; por lo tanto no es racional. Y no podemos mostrar que es imposible encontrar tales enteros; por lo tanto, no es irracional. No puedo ver que el asunto no esté zanjado al decir que es racional o irracional, pero no podemos decir cuál. La negación de la ley del tercero excluido hace ilegítimo el argumento llamado dilema, en el que se muestra que algo se sigue de una hipótesis y también de lo contradictorio de esa hipótesis, y se concluye que es verdadero incondicionalmente. Así, Brouwer es incapaz de justificar buena parte de las matemáticas ordinarias, y sus conclusiones son incluso más escépticas que las de la primera teoría de Weyl.

[2] Por ejemplo, como dijo el Caballero Blanco: "Todo el que me escucha cantarla – o bien le trae *lágrimas* a sus ojos, o bien –". "¿O bien qué?", dijo Alicia, pues el Caballero había hecho una pausa repentina. "O bien no lo hace, ya sabes."

La segunda teoría de Weyl es muy parecida a la de Brouwer, pero parece negar la ley del tercero excluido por distintas razones y de un modo menos general. No parece negar que cualquier proposición es verdadera o falsa, sino que niega la ley derivada de que o bien cada número tiene una propiedad dada, o al menos un número no la tiene. Explica su negación primeramente para los números reales de la siguiente manera. Un número real está dado por una secuencia de enteros, por ejemplo como un decimal infinito; podemos concebir esta secuencia como generada o bien por una ley o por actos de elección sucesivos. Si ahora decimos que hay un número real o una secuencia teniendo una cierta propiedad, esto sólo puede significar que hemos encontrado una ley dando una [propiedad]; pero si decimos que todas las secuencias tienen una propiedad, queremos decir que tener la propiedad es parte de la esencia de una secuencia, y por tanto pertenece a secuencias surgiendo no sólo por leyes sino desde actos de elección libres. Por consiguiente no es verdad que o bien todas las secuencias tienen la propiedad o hay una secuencia no teniéndola. Pues el significado de secuencia es distinto en las dos cláusulas. Pero no veo por qué no sería posible utilizar la palabra de manera consistente. Sea como fuere, nada similar puede instarse acerca de los números enteros que no están definidos por secuencias, y así se presenta otra razón más fundamental para negar la ley del tercero excluido. Esta es que las proposiciones generales y existenciales no son realmente proposiciones. Si digo “2 es un número primo”, eso es un juicio genuino afirmando un hecho; pero si digo “Hay un número primo” o “Todos los números son primos”, no estoy expresando un juicio en absoluto. Si, como dice Weyl, el conocimiento es un tesoro, la proposición existencial es un documento certificando la existencia de un tesoro pero no diciendo dónde está. Solamente podemos decir “Hay un número primo” cuando previamente hemos dicho “Este es un número primo” y olvidado o elegido ignorar qué número particular era. Por lo tanto, nunca es legítimo decir “Hay un tal y tal” a menos que estemos en posesión de una construcción para realmente encontrar uno. En consecuencia, las matemáticas han de alterarse considerablemente; por ejemplo, es imposible tener una función de una variable real con más de un número finito de discontinuidades. Regresaré más tarde al fundamento sobre el cual esto descansa, a saber, la perspectiva de que las proposiciones existenciales y generales no son juicios genuinos.

Pero primero debo decir algo sobre el sistema de Hilbert y sus seguidores, que está diseñado para poner fin de una vez por todas a tal escepticismo. Esto debe hacerse considerando a las matemáticas avanzadas como la manipulación de símbolos sin sentido de acuerdo con reglas fijas. Comenzamos con ciertas filas de símbolos llamadas axiomas: desde éstos podemos derivar otros al sustituir ciertos símbolos llamados constantes por otros llamados variables, y al proceder desde el par de fórmulas *p*, si *p* entonces *q*, a la fórmula *q*.

Así, las matemáticas propiamente dichas son consideradas como un tipo de juego, jugado con marcas sin sentido sobre un papel, algo así como el juego del gato; pero además de esto habrá otro sujeto llamado metamatemáticas, que no es sin sentido, sino que consiste en afirmaciones reales sobre las matemáticas, diciéndonos que esta o aquella fórmula puede o no puede obtenerse desde los axiomas de acuerdo con las reglas de deducción. El teorema más importante de las metamatemáticas es que no es posible deducir una contradicción desde los axiomas, donde por una contradicción se entiende una fórmula con un cierto tipo de forma, que puede tomarse para ser $0 \neq 0$. Esto, entiendo, lo ha probado Hilbert, y así ha eliminado la posibilidad de contradicciones y escepticismo basados en ellas.

Ahora, cualquier otra cosa que esté haciendo un matemático, ciertamente está haciendo marcas sobre un papel,[3] y así este punto de vista no consiste en nada más que la verdad; pero es difícil suponer que es toda la verdad. Debe haber alguna razón para la elección de los axiomas, y alguna razón de por qué la marca particular $0 \neq 0$ es considerada con tanto aborrecimiento. Sin embargo, este último punto puede explicarse por el hecho de que los axiomas permitirían que cualquier cosa fuese deducida desde $0 \neq 0$, de modo que si $0 \neq 0$ pudiese probarse, cualquier cosa podría probarse, lo que terminaría el juego para siempre, lo cual sería muy aburrido para la posteridad. De nuevo, puede preguntarse si es realmente posible probar que los axiomas no llevan a contradicción alguna, ya que nada puede probarse a menos que se den por sentados algunos principios y se asuma que no llevan a contradicción alguna. Esta objeción es admitida, pero se sostiene que los principios utilizados en la prueba metamatemática de que los axiomas de las matemáticas no llevan a contradicción alguna son tan obviamente verdaderos que ni siquiera los escépticos pueden

[3] Este texto es de 1926. Nota del Traductor.

dudar de ellos. Pues todos ellos se relacionan no con cosas abstractas o infinitamente complejas, sino con marcas en el papel, y aunque cualquiera puede dudar si una subclase de un cierto tipo de serie infinita debe tener un primer término, nadie puede dudar que si = ocurre en una página, hay un lugar en la página en el que ocurre por primera vez.

Pero, concediendo todo esto, todavía debe preguntarse qué uso o mérito hay en este juego que juega el matemático, si es realmente un juego y no una forma de conocimiento; y la única respuesta que se ofrece es que algunas de las fórmulas del matemático tienen o puede dárseles significado, y que si éstas pueden ser probadas en el sistema simbólico sus significados serán verdaderos. Pues Hilbert comparte la opinión de Weyl de que las proposiciones generales y existenciales son insignificativas, de modo que las únicas partes de las matemáticas que significan algo son las afirmaciones particulares sobre enteros finitos, como "47 es un primo" y conjunciones y disyunciones de un número finito de tales afirmaciones como "Hay un primo entre 50 y 100", que puede considerarse como significando "O 51 es un primo o 52 es un primo, etc., hasta o 99 es un primo". Pero como todas estas proposiciones de aritmética simple pueden probarse fácilmente sin utilizar en absoluto matemáticas avanzadas, este uso no puede ser de gran importancia. Y parece que aunque el trabajo de Hilbert proporciona un método nuevo y poderoso, que él ha aplicado con éxito al problema del continuo, como una filosofía de las matemáticas difícilmente puede considerarse como adecuado.

Vemos entonces que estas autoridades, grandes como son las diferencias entre ellos, concuerdan en que el análisis matemático como ordinariamente se enseña no puede ser considerado como un cuerpo de verdad, sino que o bien es falso o a lo mucho un jugo sin sentido con marcas en papel; y esto significa, creo, que los matemáticos de este país deberían prestar alguna atención a sus opiniones, e intentar encontrar algún modo de enfrentar la situación.

Consideremos, pues, qué tipo de defensa puede hacerse para las matemáticas clásicas, así como la filosofía de Russell acerca de ellas.

Debemos comenzar con lo que parece ser la cuestión crucial, el significado de proposiciones generales y existenciales, sobre la que Hilbert y Weyl adoptan esencialmente la misma postura. Weyl dice que una proposición existencial no es un juicio, sino un abstracto de un juicio, y que una proposición general es una especie de cheque que puede cambiarse por un juicio real cuando ocurre una instancia de ella.

Hilbert, menos metafóricamente, dice que son proposiciones ideales, y que cumplen la misma función en la lógica como elementos ideales en varias ramas de las matemáticas. Explica su origen de esta manera: una proposición finita genuina como “Hay un primo entre 50 y 100” la escribimos como “Hay un primo que es mayor que 50 y menor que 100”, que parece contener una parte, “51 es un primo, o 52 es un primo, etc., *ad inf.*”, y así ser una suma lógica infinita, que, como una suma algebraica infinita, es primeramente insignificativa, y sólo puede dársele un significado secundario sujeto a ciertas condiciones de convergencia. Pero la introducción de estas formas insignificativas simplifica tanto las reglas de inferencia que es conveniente retenerlas, considerándolas como ideales, para las que debe probarse un teorema de consistencia.

Bajo esta perspectiva de la cuestión me parece que hay varias dificultades. Primero, es difícil ver qué uso puede suponerse que tengan estas [formas] ideales; pues las matemáticas propiamente dichas parecen ser reducidas a aritmética elemental, ni siquiera admitiendo al álgebra, pues la esencia del álgebra es hacer afirmaciones generales. Ahora, cualquier enunciado de aritmética elemental puede fácilmente ensayarse o probarse sin utilizar matemáticas avanzadas, las cuales, si se supone que existen solamente en aras de la aritmética simple, parecen completamente inútiles. Segundo, es difícil ver cómo la noción de una [forma] ideal puede fallar en presuponer la posibilidad del conocimiento general. Pues la justificación de [las formas] ideales yace en el hecho de que *todas* las proposiciones no conteniendo [formas] ideales que pueden probarse por medio de ellas son verdaderas. Y así es que las metamatemáticas de Hilbert, que se acuerda son auténtica verdad, están limitadas a consistir en proposiciones generales acerca de todas las pruebas matemáticas posibles, que, aunque cada prueba es un constructo finito, bien pueden ser infinitas en número. Y si, como dice Weyl, una proposición existencial es un documento certificando la existencia de un tesoro del conocimiento pero no diciendo dónde está, no puedo ver cómo explicamos la utilidad de tal documento excepto presuponiendo que su beneficiario es capaz del conocimiento existencial de que hay un tesoro en algún lugar.

Más todavía, incluso si la exposición de Hilbert pudiera ser aceptada en tanto que limitemos nuestra atención a las matemáticas, no veo cómo podría hacerse plausible con respecto al conocimiento en general. Así, si yo te digo "Tengo un perro", tú pareces obtener conocimiento de un hecho; trivial, pero todavía conocimiento. Pero "Yo tengo un perro" debe ponerse en simbolismo lógico como "Hay algo que es un perro y es tenido por mí"; de modo que el conocimiento es conocimiento de una proposición existencial, cubriendo al rango posiblemente infinito de "cosas". Ahora bien, posiblemente podría mantenerse que mi conocimiento de que tengo un perro surgió del modo descrito por Hilbert por mi incorrecta separación de lo que parece ser parte de una proposición finita, como "Fido es un perro y es tenido por mí", pero tu conocimiento no puede explicarse de esta manera, porque la proposición existencial expresa todo lo que has conocido, y probablemente todo lo que conocerás sobre el asunto.

Por último, incluso los hechos aparentemente individuales de la aritmética simple me parece que son realmente generales. Pues, ¿qué son estos números, de qué se tratan? De acuerdo con Hilbert, marcas sobre papel construidas a partir de las marcas 1 y +. Pero esta exposición me parece inadecuada, porque si yo dijese "Tengo dos perros", eso también te diría algo; comprenderías la palabra "dos", y toda la oración podría ser algo como "Hay *x* e *y*, que son mis perros y no son idénticos entre sí". Este enunciado parece involucrar la idea de la existencia, y no tratarse de marcas en papel; de modo que no puedo ver que pueda sostenerse seriamente que un número cardinal que responde a la pregunta "¿Cuántos?" sea meramente una marca sobre papel. Si después tomamos uno de estos hechos aritméticos individuales, como $2+2=4$, me parece que esto significa "Si las *p*s son dos en número, y las *q*s también, y nada es una *p* y una *q*, entonces el número de cosas que son o *p*s o *q*s es cuatro". Pues este es el significado en el que debemos tomar $2+2=4$ con el fin de utilizarlo, como lo hacemos, para inferir de que tengo dos perros y dos gatos a que tengo cuatro mascotas. Este hecho aparentemente individual, $2+2=4$, contiene entonces varios elementos de generalidad y existencialidad [*existentiality*], primeramente porque las *p*s y *q*s son características absolutamente generales, y segundo porque las partes de la proposición, tal como "si las *p*s son dos en número", involucran, como ya vimos, la idea de existencia.

Es posible que toda la aserción de que las proposiciones generales y existenciales no pueden expresar juicios o conocimiento genuinos sea puramente verbal; que meramente se esté decidiendo enfatizar la diferencia entre proposiciones individuales y generales al rehusarse a utilizar las palabras juicio y conocimiento en conexión con las últimas. Esto, sin embargo, sería una pena, porque todas nuestras asociaciones naturales con las palabras juicio y conocimiento se ajustan a proposiciones generales y existenciales tanto como a proposiciones individuales; pues en cualquier caso podemos sentir mayores o menores grados de convicción sobre el asunto, y en cualquier caso podemos estar en algún sentido en lo cierto o equivocados. Y la sugerencia que está implícita, que el conocimiento general y existencial existe simplemente en aras del conocimiento individual, me parece completamente falsa. Al teorizar, lo que admiramos por encima de todo es la generalidad, y en la vida cotidiana puede ser más que suficiente con conocer la proposición existencial de que hay un toro en alguna parte de un cierto campo, y puede no haber mayor ventaja en saber que es este toro y aquí en el campo, en lugar de meramente un toro en alguna parte.

¿Cómo, entonces, hemos de explicar las proposiciones generales y existenciales? Creo que no podemos hacer mejor que aceptar la perspectiva que ha presentado Wittgenstein como una consecuencia de su teoría de las proposiciones en general. Las explica con referencia a lo que pueden llamarse proposiciones atómicas, que afirman el tipo de hecho más simple posible, y podrían expresarse sin utilizar, ni siquiera implícitamente, cualesquiera términos lógicos como o, si, todos, algunos. "Esto es rojo" es quizá una instancia de una proposición atómica. Supóngase que ahora tenemos, digamos, $n$ proposiciones atómicas; con respecto a su verdad o falsedad hay $2^n$ posibilidades últimas mutuamente excluyentes. Llamemos a éstas las posibilidades de verdad de las $n$ proposiciones atómicas; entonces podemos tomar cualquier subconjunto de estas posibilidades de verdad y afirmar que es una posibilidad de este subconjunto la que, de hecho, se realiza. Podemos elegir este subconjunto de posibilidades en el que afirmamos que yace la verdad de $2^{2^n}$ maneras; y éstas serán todas las proposiciones que podemos construir a partir de estas $n$ proposiciones atómicas. Así, para tomar un ejemplo sencillo, "Si $p$, entonces $q$" expresa acuerdo con las tres posibilidades de que tanto $p$ como $q$ son verdaderas, de que *p* es falsa y *q* verdadera, y de que *p* es falsa y *q* falsa, y niega la posibilidad restante de que *p* es verdadera y *q* falsa.

Podemos ver fácilmente que desde este punto de vista hay una redundancia en todas las notaciones lógicas ordinarias, porque podemos escribir de muchas maneras distintas lo que es esencialmente la misma proposición, expresando acuerdo y desacuerdo con los mismos conjuntos de posibilidades.

El Sr. Wittgenstein sostiene que todas las proposiciones expresan acuerdo y desacuerdo con posibilidades de verdad de proposiciones atómicas o, como decimos, son funciones de verdad de proposiciones atómicas; aunque a menudo las proposiciones atómicas en cuestión no están enumeradas, sino determinadas como todos los valores de una cierta función proposicional. Así, la función proposicional "*x* es rojo" determina una colección de proposiciones que son sus valores, y podemos afirmar que todos o al menos uno de estos valores son verdaderos al decir "Para todo *x*, *x* es rojo" y "Hay un *x* tal que *x* es rojo", respectivamente. En otras palabras, si pudiésemos enumerar los valores de *x* como *a*, *b*,…,*z*, "Para todo *x*, *x* es rojo" sería equivalente a la proposición "*a* es rojo y *b* es rojo y … y *z* es rojo". Es claro, desde luego, que el estado mental de un hombre utilizando una expresión difiere en varios aspectos del de un hombre utilizando la otra, pero lo que podría llamarse el significado lógico del enunciado, el hecho que se afirma que es, es el mismo en los dos casos.

Es imposible discutir ahora todos los argumentos que podrían emplearse en contra de esta perspectiva, pero debe decirse algo acerca del argumento de Hilbert, de que si la variable tiene un número infinito de valores, si, en otras palabras, hay un número infinito de cosas en el mundo del tipo lógico en cuestión, tenemos aquí una suma o un producto lógico infinito que, como una suma o un producto algebraico infinito, es inicialmente insignificativo y sólo puede dársele un significado de un modo indirecto. Me parece que esto descansa en una falsa analogía; la suma lógica de un conjunto de proposiciones es la proposición de que al menos una [proposición] del conjunto es verdadera, y no parece importar si el conjunto es finito o infinito. No es como una suma algebraica para la cual la finitud es esencial, y que se extiende paso a paso desde la suma de dos términos. Decir que cualquier cosa posiblemente involucrando un infinito de cualquier tipo debe ser insignificativa es declarar de antemano que cualquier teoría real de los agregados es imposible.

Aparte de proporcionar una exposición simple de las proposiciones existenciales y generales, la teoría de Wittgenstein resuelve otra cuestión de la mayor importancia al explicar precisamente la naturaleza peculiar de las proposiciones lógicas. Cuando el Sr. Russell primero dijo que las matemáticas podrían reducirse a la lógica, su visión de la lógica era que consistía en todas las proposiciones verdaderas absolutamente generales, proposiciones, pues, que no contenían (en contraposición a las lógicas) constantes materiales. Después abandonó esta postura, porque fue claro que se requería alguna característica más además de la generalidad. Pues sería posible describir todo el mundo sin mencionar ninguna cosa particular, y claramente algo puede ser, por casualidad, verdadero de cualquier cosa sin tener el carácter de necesidad que pertenece a las verdades de la lógica.

Si, entonces, hemos de entender qué es la lógica, y en la visión del Sr. Russell qué son las matemáticas, debemos intentar definir esta característica adicional que vagamente puede llamarse necesidad, o desde otro punto de vista, tautología. Por ejemplo, "*p* es verdadera o falsa" puede considerarse como una verdad necesaria o como una mera tautología. Este problema es resuelto incidentalmente por la teoría de las proposiciones de Wittgenstein. Las proposiciones, dijimos, expresaban acuerdo y desacuerdo con las posibilidades de verdad de proposiciones atómicas. Dadas $n$ proposiciones atómicas, hay $2^n$ posibilidades de verdad, y podemos concordar con cualquier conjunto de éstas y discrepar con el resto. Entonces habrá dos casos extremos, uno en el que concordamos con todas las posibilidades y no discrepamos con ninguna, otro en el que no concordamos con ninguna y discrepamos con todas. Al primero se le llama tautología, al segundo contradicción.

La tautología más simple es "*p* o no *p*": tal declaración no añade nada a nuestro conocimiento, y realmente no afirma un hecho; no es, por así decirlo, una proposición real, sino un caso degenerado. Y se encontrará que todas las proposiciones de la lógica son tautologías en este sentido; y ésta es su característica distintiva. Todas las proposiciones primitivas en *Principia Mathematica* son tautologías excepto por el axioma de reducibilidad, y las reglas de deducción son tales que desde tautologías sólo pueden deducirse tautologías, de modo que si no fuera por dicho axioma, toda la estructura consistiría en tautologías. Es así que regresamos a la vieja dificultad, pero es posible esperar que también ésta pueda eliminarse por alguna modificación de la teoría de tipos que pueda resultar a partir del análisis de Wittgenstein.

Una teoría de tipos debe permitirnos eludir las contradicciones; la teoría de Whitehead y Russell consistía en dos partes distintas, unidas solamente por estar ambas deducidas del bastante vago "principio del círculo vicioso". La primera parte distinguía funciones proposicionales según sus argumentos, i. e., clases según sus miembros; la segunda parte creó la necesidad del axioma de reducibilidad al requerir distinciones adicionales entre órdenes de funciones con el mismo tipo de argumentos.

Podemos dividir fácilmente las contradicciones según qué parte de la teoría se requiere para su solución, y una vez hecho esto encontramos que estos dos conjuntos de contradicciones se distinguen también de otra manera. Aquellas resueltas por la primera parte de la teoría son todas puramente lógicas; no involucran ideas excepto las de clase, relación y número, podrían plantearse en simbolismo lógico, y ocurren en el desarrollo real de las matemáticas cuando éste se sigue en la dirección correcta. Tales son la contradicción del mayor ordinal y la de la clase de clases que no son miembros de sí mismos. Con respecto a éstas, la solución del Sr. Russell parece inevitable.

Por otro lado, del segundo conjunto de contradicciones ninguna de ellas es puramente lógica o matemática, sino que todas involucran algún término psicológico como significar, definir, nombrar o afirmar. Ocurren no en las matemáticas, sino al pensar en matemáticas; de modo que es posible que surjan no de una lógica o matemática defectuosa, sino de la ambigüedad en las nociones psicológicas o epistemológicas de significar y afirmar. En realidad, parece que este debe ser el caso, porque un examen pronto convence a uno de que el término psicológico es en cada caso esencial para la contradicción, que no podría construirse sin introducir la relación de palabras con su significado o con algún equivalente.

Si ahora intentamos aplicar a la cuestión la teoría de la generalidad de Wittgenstein, podemos, creo, construir muy fácilmente una solución sobre estas líneas. Explicar esto adecuadamente requeriría de un artículo entero, pero puede ser posible ofrecer alguna idea de ello con pocas palabras. En la teoría de Wittgenstein una proposición general es equivalente a una conjunción de sus instancias, de modo que el tipo de hecho afirmado por una proposición general no es esencialmente distinto de aquel afirmado por una conjunción de proposiciones atómicas. Pero el símbolo para una proposición general significa su significado de una manera distinta de aquella en la que el símbolo para una proposición elemental lo significa, porque la última contiene nombres para todas las cosas de las que trata, mientras que el símbolo de la proposición general contiene únicamente una variable representando todos sus valores a la vez. De forma que aunque los dos tipos de símbolo podrían significar la misma cosa, los sentidos de significado en los que la significan deben ser distintos. Por lo tanto, los órdenes de proposiciones serán características no de lo que se significa, que por sí solo es relevante en las matemáticas, sino de los símbolos utilizados para significarlo.

Las proposiciones de primer orden serán más bien como palabras habladas; la misma palabra puede ser tanto hablada como escrita, y la misma proposición puede, teóricamente, ser expresada en distintos órdenes. Aplicando esto *mutatis mutandis* a funciones proposicionales, encontramos que las distinciones típicas entre funciones con los mismos argumentos aplican no a lo que se significa, sino a la relación de significado entre símbolo y objeto significado. Por consiguiente pueden ser desatendidas en las matemáticas, y la solución de las contradicciones puede preservarse en una forma ligeramente modificada, porque las contradicciones relevantes aquí tienen todas que ver con la relación de significado.

Creo que de este modo es posible huir de la dificultad del axioma de reducibilidad y eliminar otras objeciones más filosóficas que han sido hechas por Wittgenstein, rehabilitando así la exposición general de los fundamentos de las matemáticas ofrecida por Whitehead y Russell. Pero todavía queda un punto importante en el que la teoría resultante debe considerarse como insatisfactoria, y esto está relacionado con el axioma del infinito.

De acuerdo con los autores de *Principia Mathematica*, no hay modo de probar que hay un número infinito de cosas en ningún tipo lógico; y si no hay un número infinito en ningún tipo, toda la teoría de agregados infinitos, secuencias, cálculo diferencial y análisis en general se viene abajo. Según su teoría del número, si solamente hubiesen diez individuos, en el sentido de número apropiado a individuos, todos los números mayores que diez serían idénticos a la clase nula y de este modo idénticos entre sí. Por supuesto que habría $2^{10}$ clases de individuos, y así el siguiente tipo de números estaría bien hasta $2^{10}$, y así al tomar un tipo suficientemente alto podría alcanzarse cualquier número finito.

Pero de esta manera será imposible alcanzar $\aleph_0$. Existen varias sugerencias naturales para deshacerse de esta dificultad, pero todas parecen llevar a reconstruir la contradicción del mayor ordinal.

Entonces parecería imposible presentar al análisis excepto como una consecuencia del axioma del infinito; tampoco veo que esto sería objetable en general, porque tendría poco sentido probar proposiciones acerca de series infinitas a menos que tales cosas existieran. Y, por otra parte, las matemáticas de un mundo con un número finito dado de miembros son de poco interés teórico, porque todos sus problemas pueden resolverse por un procedimiento mecánico.

Pero me parece que surge una dificultad en conexión con proposiciones elementales en la teoría de números que sólo pueden probarse con métodos trascendentales, como la evaluación de Dirichlet del número de clase de formas cuadráticas. Consideremos un resultado así de la forma “Cada número tiene la propiedad *p*”, probado por métodos trascendentales sólo para el caso de un mundo infinito; además de esto, si supiésemos que el mundo solamente contenía, digamos, 1,000,000 cosas, podríamos probarlo al examinar los números hasta 1,000,000. Pero supóngase que el mundo es finito y que no obstante no conocemos ningún límite superior a su tamaño; entonces no tenemos ningún método para probarlo en absoluto.

Podría pensarse que podríamos eludir esta conclusión al decir que, aunque ningún agregado infinito pueda existir, la noción de un agregado infinito no es auto-contradictoria, y por tanto es permisible en las matemáticas. Pero creo que esta sugerencia es inútil por tres razones: primero, parece ser resultado de algún razonamiento bastante difícil, pero en mi opinión conclusivo, de Wittgenstein de que, si aceptamos su teoría de proposiciones generales y existenciales (y fue sólo así que podríamos deshacernos del axioma de reducibilidad), se seguirá que si no existiese ningún agregado infinito la noción de tal agregado sería auto-contradictoria; segundo, sea como sea, generalmente se acepta que el único modo de demostrar que los postulados son compatibles es mediante un teorema de existencia que muestre que realmente hay, y no meramente que podría haber, un sistema del tipo postulado; tercero, incluso si se concediera que la noción de un agregado infinito no fuese auto-contradictoria, tendríamos que hacer grandes alteraciones en nuestro sistema de lógica con el fin de validar pruebas dependientes de construcciones en términos de cosas que podrían existir pero que no lo hacen. El sistema de *Principia* sería bastante inadecuado.

Entonces, ¿qué puede hacerse? Podemos intentar alterar las pruebas de tales proposiciones, y por tanto podría ser interesante intentar desarrollar una nueva matemática sin el axioma del infinito; los métodos a ser adoptados podrían parecerse a aquellos de Brouwer y Weyl. Estas autoridades, empero, me parece que son escépticas acerca de las cosas erróneas al rechazar no el axioma del infinito, sino la claramente tautológica ley del tercero excluido. Pero no me siento nada seguro de que pudiese conseguirse cualquier cosa sobre estas líneas, que reemplazarían a los argumentos trascendentales empleados actualmente.

Otra posibilidad es que se adoptara el método general de Hilbert, y que utilizásemos su prueba de que ninguna contradicción puede deducirse de los axiomas de las matemáticas, incluyendo un equivalente del axioma del infinito. Entonces podemos argüir así: si un número dado tiene o no tiene la propiedad $p$ siempre puede averiguarse mediante cálculos. Esto nos dará una prueba formal del resultado para este número particular, que no puede contradecir al resultado general probado a partir del axioma del infinito, que por tanto debe ser válido.

Pero este argumento aún será incompleto, porque sólo aplicará a números que pueden simbolizarse en nuestro sistema. Y si estamos negando el axioma del infinito, habrá un límite superior al número de marcas que puedan hacerse sobre el papel, ya que el espacio y el tiempo serán finitos, tanto en extensión como en divisibilidad, de modo que algunos números serán demasiado grandes como para ser escritos, y para ellos no aplicará la prueba. Y al ser finitos estos números serán existentes en un tipo suficientemente alto, y la teoría de Hilbert no nos auxiliará a probar que tienen la propiedad *p*.

Otra seria dificultad acerca del axioma del infinito es que, si es falso, es difícil ver cómo el análisis matemático podría utilizarse en la física, que parece requerir que sus matemáticas sean verdaderas y no que meramente se sigan de una hipótesis posiblemente falsa. Pero discutir esto a detalle nos llevaría demasiado lejos.

En lo tocante a cómo llevar el asunto más lejos, no tengo ninguna sugerencia que hacer; todo lo que espero es haber hecho claro que el asunto es muy difícil, y que las principales autoridades son muy escépticas en cuanto a si las matemáticas puras tal como se enseñan ordinariamente pueden justificarse lógicamente, pues Brouwer y Weyl dicen que no pueden, y Hilbert propone sólo justificarlas como un juego con marcas insignificativas sobre el papel. Por otra parte, aunque mi intento de reconstrucción de la postura de Whitehead y Russell supera, creo, muchas de las dificultades, es imposible considerarlo como completamente satisfactorio.